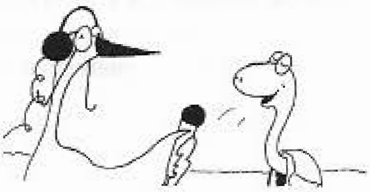
Logique et raisonnement : les difficultés intrinsèques.

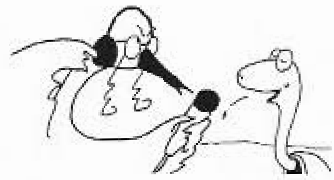
Nous connaissons d'expérience les difficultés des élèves à raisonner rigoureusement. Ces difficultés sont-elles identifiables ? Peut-on distinguer, au-delà des disparités de niveau constatées, les obstacles sous-jacents à ce type d' apprentissage ?

Langage courant et langage mathématique
Logique naturelle et logique mathématique

Les notions et les méthodes mathématiques se transmettent à travers le **langage courant**. Véhiculées de manière parfois cahotique dans la trame langagière, les **expressions mathématiques** possèdent cependant une syntaxe et une grammaire qui leur sont propres. Ce statut paradoxal du *discours mathématique* qui, dans la salle de classe, utilise le langage courant pour exprimer des choses qui n'en relèvent pas toujours, explique déjà à lui seul une part des difficultés rencontrées.



Les pièges des mots



Nous le savons bien, le **et** et le **ou** n'ont pas le même sens dans le langage courant et dans le langage mathématique. Dès lors, leur emploi pour formaliser certaines écritures est une difficulté pour l'élève. Ainsi quand le professeur énonce : « les solutions dans R de l'inéquation $X^2 > 4$ sont les réels X tels que $X > 2$ *ou* $X < -2$ », l'élève écrit spontanément un « *et* » à la place du « ou ».

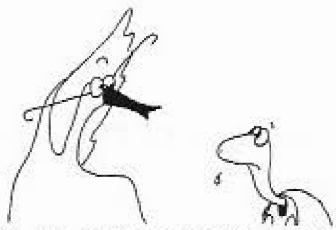
Le **si** non plus n'a pas le même sens dans le langage courant et dans le langage mathématique. Un « Si tu n'es pas sage, tu n'auras pas de dessert » est immédiatement interprété par l'enfant : « Si je suis sage, j'aurai du dessert » ; ce qui correspond d'ailleurs sûrement au message que l'adulte désirait faire passer ! (son « si » veut dire en fait « si et seulement si »). Dans un contexte mathématique, l'interprétation de l'enfant serait une grossière erreur de **logique**.

Sur les copies d'examen fournies par le Ministère de l'Education Nationale figure une indication : « Si votre compositon comporte plusieurs feuilles, numérotez-les, ../... ». Un candidat au baccalauréat remet une seule copie à l'issue d'une épreuve, numérotée 1 / 1. Est-il en règle ? et s'il ne numérotait pas sa copie ? L'analyse logique de la recommandation lui fera bientôt retrouver la sérénité : logiquement , il peut faire comme il veut.

Puisque le « si ... alors » pose tant de difficultés, ne vaut-il pas mieux éviter son emploi et lui trouver des substituts ? Par exemple, au lieu de : « si ABCD est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu », on pourrait faire écrire : « Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu » ; pourquoi pas ? Cependant, la lecture d'une copie de 4° donne à réfléchir. L'élève a rédigé : « O est le milieu de [AC] et de [BD]. Or, dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu, donc ABCD est un parallélogramme ». Dans la propriété apprise, l'élève ne distingue même plus les hypothèses de la conclusion. L'imbroglio logique est total.

Quant au **il faut**, il concentre à lui seul la plupart des difficultés rencontrées en logique. Dans un raisonnement mathématique, l'élève débutant le comprendra et l'utilisera généralement dans un sens radicalement opposé à sa signification logique. Ainsi, pour montrer qu'un triangle ABC est rectangle en A, connaissant les longueurs de ses côtés, il écrira : « Pour que ABC soit rectangle en A, *il faut* (sous-entendu : *il faut que je prouve* ou *on doit prouver)* que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ » ; puis dans la même copie : « Si ABC est rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$ or $AB^2 + AC^2 = BC^2$, donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ». La présomption d'innocence qui émanait de la lecture du premier passage se transmue alors en diagnostic d' illogisme flagrant !

La spécificité des démarches



Le tableau ci-après permet de réfléchir à la spécificité du **raisonnement déductif mathématique** face à **l'usage spontané de l'argumentation** dans la vie courante . Il n'est pas inutile de prendre conscience des particularités voire des oppositions radicales de leurs différentes approches.
En outre, en classe les cours se suivent... mais les méthodes ne se ressemblent pas. Avons-nous réfléchi à la manière dont un élève allait intégrer des démarches aussi différentes que celles sous-tendant une dissertation littéraire d'une part, et la résolution d'un problème de géométrie d'autre part ?
Un autre aspect de la question mérite d'être mentionné. En effet, on serait parfois tenté d'expliquer le « si ... alors... » en rattachant ses hypothèses aux notions de *cause* ou d'*antériorité*, et sa conclusion à celles d'*effets* ou de postériorité. Le « si ... alors...» de l'**implication** mathématique ne doit pourtant pas être rattaché à une quelconque notion de causalité ou de temporalité. L'organigramme des fiches que vous trouverez dans ce livret l'illustre bien. La fiche A1, par exemple, doit être étudiée *avant* la fiche A2. Ceci est traduit dans l'organigramme par la flèche (flèche verticale dans le schéma) qui va de A1 vers A2 et qui signifie l'ordre de procédure : **A1 $\rightarrow$ A2** : on doit étudier A1 *avant* d'étudier A2. Mais si l'on se place **du point de vue logique**, l'étude de A1 est une condition **nécessaire** pour celle de A2 ; l'ordre de procédure se ramène finalement, par la contraposée, à l'implication logique « **A2 $\Rightarrow$ A1** »... ! cet exemple justifierait à lui seul l'urgence de *définir* et d'*utiliser* la flèche d'implication logique avant que son usage ne soit banalisé ou détourné de son sens mathématique.

Du bon usage des formalismes

Est-il cependant souhaitable, voire nécessaire, d'utiliser des **symboles particuliers** pour raisonner ? ces notations ne vont-elles pas induire des automatismes dénués de sens ? émousser l'intuition au profit du formalisme ? L'usage des symboles lors de la réforme des « mathématiques modernes » n'a-t-il pas été excessif ? Raisonner juste n'a rien d'évident. La logique de la pensée et la conduite rigoureuse d'un raisonnement relèvent d'un véritable apprentissage. Des expériences sur la **déduction** l'ont montré : (comme l'explique notamment Pierre Lévy dans Les technologies de l'intelligence) lorsqu'il est privé de son papier et de son crayon, l'être humain ne semble posséder aucune aptitude particulière à ce type de raisonnement. Etudiants, universitaires ou logiciens de métier s'emmêlent dans les quantificateurs et se trompent dans leurs syllogismes. Sans aides extérieures telles qu'**écritures symboliques** (notamment A $\Rightarrow$ B) et diagrammes, ils ne peuvent venir à bout des raisonnements escomptés. Ceci conduit à penser que l'écriture symbolique, *codant* l'information et gardant *mémoire* des procédures, permet de *libérer l'esprit* pour appréhender de manière efficace des problématiques complexes.
Les apprentissages scolaires se rattachent quant à eux à des questions plus élémentaires. On peut facilement en analyser les structures logiques à l'aide du symbole d'implication. L'usage de cette flèche d'implication « $\Rightarrow$ » semble à première vue hors de propos au collège. Cependant, je l'utilise dès la 4° comme un *logo* ou un *codage* pour comprendre et *visualiser* les structures logiques d'une propriété. Les directives officielles stipulent pour le lycée : l'« *on entraînera les élèves à la* ***pratique*** *des modes usuels de raisonnement ; équivalence logique, implication, contraposition ... Les élèves doivent connaître et peuvent utiliser les symboles* $\Rightarrow$ *et* $\Leftrightarrow$ *, mais il convient d'éviter tout recours systématique à ces symboles.* ***Tout exposé de logique mathématique est exclu.*** » (Extrait du programme de mathématiques de 1ère S -B.O n° spécial 2 - 2 mai 1991)

Il y a un juste équilibre à trouver entre l'abus des formalismes et la mise en oeuvre de quelques structures et règles de la logique élémentaire. Il faut donc développer des **médiations pédagogiques** (discursives,figuratives...) qui puissent conduire les intuitions naturelles jusqu'aux formalisations mathématiques attendues. Une situation concrète peut souvent être inventée pour illustrer un contenu mathématique. C'est le rôle, dans la bande dessinée, de la « Mousse-Seulement Si » et du « Théorème des nuages ». Un **va-et-vient** continuel **entre le langage naturel** et **la formalisation mathématique** permet de mettre en évidence leurs spécificités mutuelles. L'explicitation enfin de la **structure des raisonnements** donne une réelle *consistance* aux apprentissages et aux méthodes mathématiques.

Logique naturelle / Logique mathématique : tableau comparatif

Usage spontané de **l'ARGUMENTATION**	Un type d'argumentation mathématique : le **RAISONNEMENT DEDUCTIF**
• **Argumenter** : provoquer ou accroître l'adhésion des esprits aux thèses qu'on présente à leur assentiment • **Argumentation** : "tissu" dont la solidité dépasse de loin celle de chacun des fils qui la composent.	• **Démontrer** : faire un raisonnement logiquement valide permettant d'établir la justesse d'une proposition. Exemple : le *raisonnement déductif.* • **Démonstration** : "chaîne" dont la solidité correspond à chacun des maillons qui la composent.
• La validité d'une argumentation est une affaire de degré : elle est plus ou moins forte.	• Un raisonnement déductif est ou bien correct ou bien incorrect ; il n'y a pas de milieu.
• Une proposition et son contraire peuvent parfois être simultanément affirmés ou simultanément niés.	• Dans le cadre du principe du tiers exclu, une proposition est ou vraie, ou bien fausse.
• Une argumentation n'est *jamais close* ; on peut toujours viser à la renforcer.	• Une démonstration correcte *se suffit à elle-même*.
• Une argumentation peut se déployer dans le temps et s'inscrit dans un contexte social et psychologique à prendre en compte.	• Une démonstration est quasi intemporelle et impersonnelle.
• Les arguments utilisés reposent souvent sur des prémisses implicites, et parfois équivoques.	• Les propriétés utilisées sont explicitées.
• **"Logique naturelle"**.	• **Logique formelle mathématique**. 
• Est tenu pour vrai ce qui a lieu dans la majorité des cas (L'exception confirme la règle)	• Des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas à prouver que cet énoncé est vrai. • Un contre-exemple suffit pour *invalider* un énoncé.
• Une implication sous-entend souvent sa réciproque.	• *Hypothèses et Conclusion* ne sont pas permutables. Il y a *indépendance* entre une implication et son implication réciproque.
• Les étapes du raisonnement ne sont pas toujours élucidées. 	• Un raisonnement déductif comprend **deux niveaux d'organisation** : 1) *Organisation locale* (énoncé-tiers, règle de détachement) 2) *Organisation globale* : *recyclage* de la conclusion d'un ou de plusieurs pas comme prémisses du nouveau pas.
• *Accumulation* des propositions et arguments. Les conclusions intermédiaires contribuent à fournir une vision d'ensemble.	• Les conclusions intermédiaires *se remplacent*. Organisation des pas vers l' "énoncé-cible".
• Les **connecteurs** "or, car, donc, ..." remplissent une *réelle fonction* d'enchaînement ou d'organisation des propositions énoncées. (Relation de cause à effet, relation d'opposition, de restriction, de condition, etc.)	• L'ajout de **connecteurs** est *purement stylistique* il facilite la lecture ou l'écoute du raisonnement.

Bibliographie : G.Arsac, ...*Initiation au raisonnement déductif au collège*, Presses Universitaires de Lyon. 92. / R. Duval et M.A. Egret. *Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif.* Repères n° 12, juillet 93. / P.Wieruszewski. *Raisonnement au collège*, Plot n° 66, mars 94.