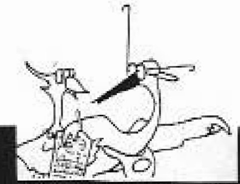
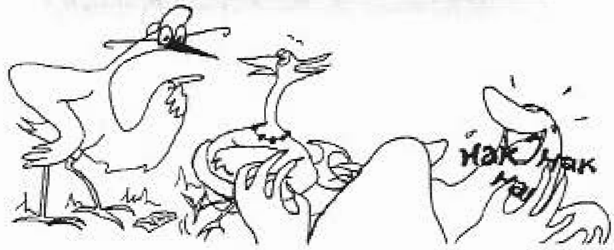


Logique sur le terrain

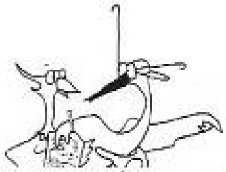


Les devoirs sur table sont souvent nos meilleurs pourvoyeurs pédagogiques. Les mines intarissables d'erreurs, de réussites ou de maladresses en tous genres qu'ils contiennent sont une aide substantielle pour rester en prise avec la « réalité mathématique » de la classe.

Les séquences de ***Logique sur le terrain*** sont conçues pour exploiter ces passages significatifs. L'expérience montre qu'une relecture guidée d'extraits de copies amène les élèves à une double prise de conscience : il n'y a pas de démonstration, voire de calcul qui tiennent sans réflexion logique conjointe ; analyser la manière dont les autres travaillent aide à cerner comment l'on fonctionne soi-même.

Nous nous proposons de développer ci-après des situations de travail en lycée à travers quelques ***Fiches-professeur***. Celles-ci sont en rapport avec le trinôme du second degré ; une équation avec radical (c'est la B.D elle-même qui tient ici office d'extrait de copie) ; l'existence de tangentes verticales à la courbe représentative d'une fonction.
Chaque professeur pourra construire les siennes à partir des erreurs récurrentes qu'il rencontrera.

Par ailleurs, des *extraits de copies* ont été intégrés aux fiches **B3** et **B5** du volume 2 afin d'habituer les élèves à analyser leurs structures logiques. Cet apprentissage peut être commencé à partir de thèmes plus élémentaires, dans l'esprit des fiches **A9**, **3** et **A11**, **2**.



Implication, réciproque, négation, contraposée.
Trinôme du second degré

Fiche-professeur

Niveau : 1ère S
Contexte : Chapitre « Trinôme du second degré », généralement traité au début de l'année scolaire.

LOGIQUE « sur le terrain »

Acte I : Le cours est traité et, après l'étude du discriminant., la propriété **(P)** est démontrée.

> **Propriété (P)** : Pour tous réels a, b et c ($a \neq 0$), si a et c sont de signes contraires, alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes.

- On a demandé, pour la séance suivante, d'étudier soigneusement les notes de cours sur le trinôme, et de réfléchir à la **réciproque de la propriété (P)**.

Acte II : Au cours suivant, une interrogation écrite de 15 minutes est donnée :

1) Démontrer la propriété **(P)**.On supposera connu le théorème donnant l'existence des racines à partir du signe du discriminant Δ du trinôme.

2) Etudier la réciproque **(R)** de la propriété **(P)**.
Pour cela on énoncera d'abord cette réciproque **(R)** sous forme interrogative.

Acte III : Les interrogations écrites comportaient bon nombre d'erreurs qui ont fourni la matière de cette fiche et les extraits de copies ci-joints.

- Avant de rendre les interrogations écrites, **l'analyse suivante a été faite au tableau** :

***(P)** est de la forme : Pour tous réels a, b et c $(a \neq 0)$, si (A) alors (B)*
*Sa réciproque **(R)** est donc de la forme : Pour tous réels a, b et c $(a \neq 0)$, si (B) alors (A)*

***- ou bien (R) est vraie** : on doit alors prouver que, quels que soient les réels a, b et c $(a \neq 0)$, si on a (B) alors on a (A).* Essayer de le prouver par implications successives.

*- **ou bien (R) est fausse** : on doit alors pouvoir trouver des valeurs particulières de a, b et c $(a \neq 0)$ pour lesquelles on a (B) sans avoir (A).*
*(et constituer ainsi un **contre-exemple** cf Fiche **B2, 5**)*

> *Par définition, un contre-exemple **vérifie l'hypothèse** d'un énoncé **sans vérifier sa conclusion**. Un tel contre-exemple permet d'affirmer que l'énoncé en question est faux.*

- On a alors demandé aux élèves de corriger eux-mêmes les extraits de copies distribués.
(Voir ci-après)

Annotations : Extrait ❶ :

Extrait ❷ :

Extrait ❸ :

Extrait ❹ :

Extrait ❺ :

- Chaque élève a enfin reçu sa propre copie corrigée par le professeur.

Bilan : Travail étroitement en prise avec la réalité et les exigences de 1ère S.
Les élèves ont reçu les moyens d'**analyser** et de comprendre la **structure logique des raisonnements** et de corriger ce qu'ils avaient *eux-mêmes* écrit dans leurs copies. Dès lors, la remise des interrogations écrites corrigées a pu susciter la concentration et l'esprit critique indispensables à la compréhension des annotations et corrections du professeur.

---

❶

Propriété si a et c de signe contraire alors le trinôme $ax + bx + c$ ($a \neq 0$) admet 2 racines distincts x_1 et x_2.

ex : $+x^2 + 2x + 1$

$$\Delta = \frac{(2^2) - (4 \times -1 \times 1)}{2(+1)}$$

$$= \frac{4+4}{2}$$

$$= 4 > 0$$

on sait que si le trinômé a un discriminant positif alors il a 2 racines :

$$-\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

dans cet exemple on a donc

$$-\frac{2-2}{2} = -2 \text{ et } -\frac{2+2}{2} = 0.$$

$$S = \{-2 ; 0\}.$$

La réciproque de cette propriété n'est pas verifiée.

$2x^2 + 4x + \cancel{2}1$.

$$\Delta = 16 - 8$$
$$= 8 > 0$$

admet donc 2 racines distincts
mais a et c ne sont pas de signes contraires

❷

Propriétés.

si a et c st de signes contraire alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet 2 racines distinctes.

$\Delta = b^2 - 4ac$

si a et c sont de signes contraire alors

$\Delta = b^2 - 4ac$ et ac négatif

⊕ ⊖ ⊖ } ⊕

donc $\Delta > 0$ donc $ax^2 + bx + c$ admet 2 racines.

Réciproque.

Si $ax^2 + bx + c$ admet 2 racines alors

$\Delta > 0$

$b^2 - 4ac > 0$

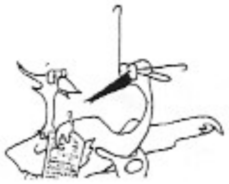
⊕ ⊖ ⊖

il faut donc que le produit ac soit négatif donc a et c doivent être de signes contraires.

$b^2 - 4ac$

⊕ ⊖ ⊕⊖

ou ⊖⊕



Prop : si a et c sont de signes contraires alors ax^2+bx+c ($a \neq 0$) admet 2 racines distinctes x_1 et x_2

3

$\Delta = b^2 - 4ac$
si a et c sont de signes contraires $ac < 0$
donc $-4ac > 0$
or $b^2 > 0$
donc $\Delta > 0$
donc le trinôme admet 2 ~~...~~ racines

Ex : $x^2 - 4x - 2$

$\Delta = 16 - 4(-2)$
$\Delta = 24$

Réciproque ; si un trinôme admet 2 racines alors a et c sont de signes contraires
c'est faux ~~car~~

Ex : $x^2 - 4x + 2$
a et c de m̂ signe

$\Delta = 16 - 4 \times 2$
$\Delta = 16 - 8$
$\Delta = 8$
le trinôme a quand même 2 racines même si a et c sont de même signes

---

Réciproque :

4 Si le trinome ax^2+bx+c admet 2 racines. alors le discriminant est positif.
Si $\Delta > 0$ alors $a.c < 0$
car $\Delta = b^2 - 4ac$

Si $ac < 0$ alors a et c sont de signes contraires.
Donc si ax^2+bx+c admet 2 racines, alors a et c sont de signes contraires.

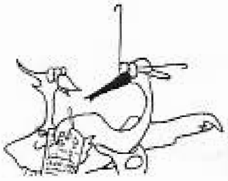
5

Etude de la réciproque :

Elle n'existe pas car on il existe des cas où a et c sont de même signe et $\Delta > 0$.
Donc on ne peut pas dire que si le trinôme a 2 racines alors a et c sont toujours de signes contraires dans ax^2+bx+c.

Raisonnement par implications
Raisonnement par équivalences

Equation avec radical



Fiche-professeur

Niveau : 2^{de} , $1^{ère}$

En lien avec la fiche **B5, 4** et la **B.D** de**Les déductions du Professeur Pythaclide** p. 26 à 30

Acte I

On donne à résoudre l'équation : $\sqrt{3 - X} = X - 2$
et l'on fait écrire l'ensemble présumé E des solutions.

Est-ce que c'est juste ?

Les élèves doivent ensuite **trouver des moyens** pour **confirmer** leur résultat et exposer clairement en quoi consistent ces moyens. (Calculs, graphiques...)
On demande comment interpréter, selon les cas, la concordance ou l'incohérence des résultats.

Pourquoi est ce faux ?

Acte II

Les élèves sont invités à **relire** papier et crayon en main, **la séquence de B.D correspondante** :

♥ **Lire la BD p.26** Les étapes décrites correspondent-elles aux vôtres ? Dans la négative, citez les différences.

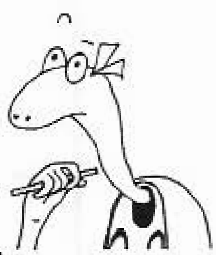
♥ **Lire la BD p.27** Pouvez-vous expliquer la réaction de Sin dans les deux premières cases ?

♥ **Lire la BD p. 28 et 29** Que fait donc faire Sin à ses élèves fictifs ? Expliquez les étapes effectuées p. 28 et dans la première moitié de la p. 29.

Acte III

Et le raisonnement ?

Quelle méthode choisir ?

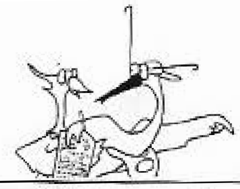


♣ **Préliminaire indispensable :** Déterminer l'**ensemble de définition** de l'équation.

L'équation $\sqrt{3 - X} = X - 2$ est définie *si et seulement si* chacun de ses membres l'est. c'est-à-dire *si et seulement si* $\mathbf{3 - X}$ est un nombre **positif**. C'est-à-dire : $\mathbf{X \leq 3}$

La résolution de l'équation s'effectue dans l'ensemble des X pour lesquels elle est définie

On résout l'équation $\sqrt{3 - X} = X - 2$ dans $D =]-\infty, 3]$



Résolution par implications

Pour tout X de $]-\infty, 3]$, **si** $\sqrt{3 - X} = X - 2$ **alors**, d'après la propriété :

« Si deux nombres sont égaux, alors leurs carrés sont égaux » on obtient : $(\sqrt{3 - X})^2 = (X - 2)^2$
donc, d' après la propriété : «Pour tout a positif, $(\sqrt{a})^2 = a$ », $3 - X = (X - 2)^2$

d'où : $3 - X = X^2 - 4X + 4$, c'est-à-dire : $X^2 - 3X + 1 = 0$

soit : $X = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ **ou** $X = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Posons $E = \{ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \}$

> **« Pour tout X ... , si X $\in$ S, alors X $\in$ E »**
> équivaut à **« S $\subset$ E »**

L'ensemble **S** des solutions de l'équation **est inclus dans** l'ensemble **E**. Il s'agit donc de *sélectionner*, parmi les éléments de E, les solutions de l'équation initiale.

Seul $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ appartient à D et vérifie l'égalité : $\sqrt{3 - X} = X - 2$ d'où $S = \{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\}$

Résolution par équivalences

Pour tout X de $]-\infty, 3]$, d'après les propriétés : « Pour tout a positif, $\sqrt{a} \geq 0$ »
et « Deux nombres **positifs** sont égaux si et seulement si leurs carrés sont égaux »,

$$\sqrt{3 - X} = X - 2 \text{ \underline{si et seulement si} } \begin{cases} (\sqrt{3 - X})^2 = (X - 2)^2 \\ \text{et} \\ X - 2 \geq 0 \end{cases}$$

Or, « pour tout a positif, $(\sqrt{a})^2 = a$ »

donc pour tout X de $]-\infty, 3]$,

$$\sqrt{3 - X} = X - 2 \text{ \underline{équivaut à} } \begin{cases} 3 - X = X^2 - 4X + 4 \\ \text{et} \\ X \geq 2 \end{cases} \quad \text{soit : } \begin{cases} X = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } X = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \text{et} \\ X \geq 2 \end{cases}$$

or seul le nombre $X = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ est supérieur à 2 (tout en appartenant à D). On en conclut :

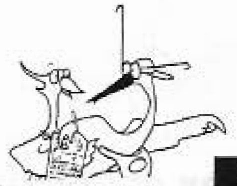
Pour tout X de $]-\infty, 3]$, $\sqrt{3 - X} = X - 2$ **si et seulement si** $X = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

d'où $S = \{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\}$

> **« Pour tout X ..., X $\in$ S équivaut à X $\in$ E »**
> signifie : **S = E**

Acte IV **Lire la BD, p.37**, la remarque de Sin dans la **6ème case :**
« Si tu raisonnes uniquement en « si ... alors », par conditions nécessaires... »

a) Que signifie : « raisonner par conditions nécessaires » ? b) Que signifie : « se soucier de la réciproque » ? c) Quels sont les « désagréments » dont parle Sin ?



Si, seulement si

Dérivabilité , Tangente verticale

Niveau : $1^{\text{ère}}$ S

Fiche-professeur

LOGIQUE « sur le terrain »

Acte I : Au cours du chapitre sur dérivation, un devoir a été donné. En voici l'énoncé :

> *On considère la fonction* $f : x \to x^3 - x^2 + 4x - 1$
>
> *1- Etudier la dérivabilité de f*
> *2- Y a-t-il des points* $M_0(x_0,\ f(x_0))$ *en lesquels Cf admet une tangente verticale ?*

La question 2 a été mal traitée et comportait beaucoup d'erreurs intéressantes à exploiter au niveau de l'apprentissage logique. Cinq passages significatifs ont été relevés.

Acte II : Cinq passages significatifs.

❶ « Si $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$, alors C_f admet une tangente verticale en M_0
or f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la limite, quand h tend vers 0, de $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
existe et est réelle. donc C_f n'admet pas de tangente verticale »

❷ « Si C_f admet une tangente verticale en M_0 alors f n'est pas dérivable en x_0
or f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc C_f n'admet aucune tangente verticale »

❸ « C_f admet une tangente verticale en $M(x, f(x))$ si et seul^t si f n'est pas dérivable en x »

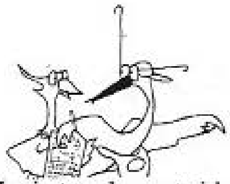
❹ « $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$ si et seulement si f n'est pas dérivable en x_0 »

❺ « C_f n'admet pas de tangente verticale en M si et seul^t si la limite, quand h tend vers 0, de $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est réelle »

- Avant la remise des devoirs, les phrases suivantes ont été écrites au tableau pour que les élèves en complètent les négations :

☐ f est **dérivable en x_0** si et seulement si la limite, quand h tend vers zéro, de $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est réelle.

☐ f est **non dérivable en x_0** si et seulement si ....



☐ C_f admet une **tangente verticale en M_0** si et seulement si la limite, quand h tend vers zéro, de $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est plus ou moins l'infini.

☐ C_f **n'admet pas de tangente verticale en M_0** si et seulement si ....

- Chaque élève a alors été invité à corriger par lui-même les cinq passages retenus.
- Les copies corrigées par le professeur ont pour finir été remises à la classe.

Bilan : L'analyse des **structures logiques** effectuée ***avant*** la remise des devoirs a permis aux élèves de comprendre leurs erreurs et de mieux percevoir les exigences de la rigueur mathématique.

Correction

❶ « Si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$, alors C_f admet une tangente verticale en M_0
or f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la limite, quand h tend vers 0, de $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
existe et est réelle. ~~donc~~ C_f n'admet pas de tangente verticale »

Erroné : raisonnement du type « Si (A) alors (B) or (non A) ~~donc~~ (non B) »

❷ « Si C_f admet une tangente verticale en M_0 alors f n'est pas dérivable en x_0
or f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc C_f n'admet aucune tangente verticale »

Exact : raisonnement du type « Si (A) alors (B) ; or (non B) donc (non A) »

❸ « C_f admet une tangente verticale en $M(x, f(x))$ ~~si et~~ seult si f n'est pas dérivable en x »

Erroné : « ... ~~si et~~ **seulement si** ... » (cas des demi-tangentes)

❹ « $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$ ~~si et~~ seulement si f n'est pas dérivable en x_0 »

Erroné : « ... ~~si et~~ **seulement si** ... » (cas des demi-limites)

❺ « C_f n'admet pas de tangente verticale en M si et seult si la limite, quand h tend vers 0,
de $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est réelle »

Erroné : « ... existe et est réelle, **ou n'existe pas** » (cas des demi-limites)