



ANALYSE DIDACTIQUE des séquences de la B.D du Volume 2

Les déductions du Professeur Pythaclide **Au fil de la B.D**

p. 7 *Deux essais pour réussir*

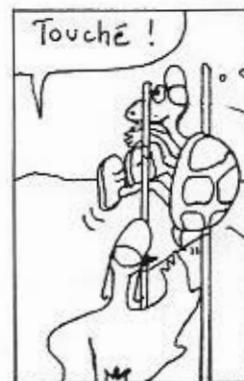
L'épreuve de saut en hauteur qui inaugure le second volume de Logique sans bosse va permettre, à travers le modèle mathématique qui lui est assigné, d'énoncer quelques propriétés concernant la **négation** ... /

On reconnaît ici un exemple d'épreuve aléatoire.

P. 8 /... notamment sur la négation d'une négation ; et sur la négation de (A ou B). La fiche **B2** peut ici être travaillée dans sa quasi totalité.

P. 9 La question du Professeur Pythaclide désarçonne Lunclotte. La difficulté sous-jacente est de s'abstraire d'une nomenclature de cas particuliers, ici en nombres infinis, pour formaliser la situation.

Dans la dernière vignette de cette page figurent les **il faut et il suffit** et **si et seulement si**. On peut se borner dans un premier temps à les faire traduire sous la forme "si ... alors ..." et réciproquement, si ... alors ...". L'étude de la page suivante, conjointement à celle de la fiche **B1**, permettra un approfondissement.



P. 10 *Le Théorème des nuages*

Le "Théorème des nuages" est très emblématique du volume 2 et constitue le pendant de la *Mousse-Seulement Si* du volume 1. Son énoncé concentre une grande richesse pédagogique et didactique : Oser appeler "théorème" une constatation météorologique dépourvue de contenu mathématique force déjà l'attention ; sa formulation est simple et suffisamment frappante ; elle illustre le type même de structure logique qui intéresse le professeur de mathématiques : celle d'une **implication vraie mais dont la réciproque est fautive** ; sa **contraposée** enfin s'énonce naturellement.

La flèche d'implication logique \Rightarrow est introduite. On étudiera ici avec profit la fiche **B1**.

Le Professeur Grand-Pi n'est autre que l'ancien professeur du Professeur Pythaclide. La B.D tient à mettre en scène une « généalogie de l'enseignement »

p. 11 L'équivalence d'une implication et de sa **contraposée** est stipulée. La contraposée est étudiée dans la fiche **B3**.

Pair au carré

Sans transition, le Professeur Pythaclide engage Lunclotte dans une nouvelle problématique concernant les carrés des nombres pairs ; elle va permettre de mettre en oeuvre une **démonstration par la contraposée**.





ANALYSE DIDACTIQUE des séquences de la B.D du Volume 2

Les déductions du Professeur Pythaclide Au fil de la B.D

- p. 12 L'explicitation d'un raisonnement n'est pas chose facile, d'autant que l'élève en début d'apprentissage n'en perçoit pas forcément l'utilité. La scène s'inspire du fameux dialogue de Platon du Ménon et va amener Lunelotte à analyser et expliciter ses intuitions. Noter la bulle rouge d'une réponse erronée.



La B.D est ici d'autant mieux appréciée que l'étude des fonctions sinus et cosinus et leur représentation graphique ont été faites.

- p. 13 *Les taupins à la rescousse*

Le sol herbeux se bosselle soudain de manière curieusement sinusoïdale... L'arrivée des taupes Sin et Cos, taupins jumaux et anciens élèves du Professeur Pythaclide, va élever le niveau mathématique et apporter la fantaisie de leurs caractères cyclothymiques. En débouchant de leur galerie, les taupins achèvent la démonstration laborieuse : *le carré de tout nombre pair est un nombre pair.*

- p. 14 *Carrément pair*

Formalisation logique de la propriété à l'aide de la flèche d'implication : $(N \text{ pair}) \Rightarrow (N^2 \text{ pair})$; Démonstration de la réciproque : $(N^2 \text{ pair}) \Rightarrow (N \text{ pair})$ à effectuer.

(Noter l'affreux jeu de mots de la deuxième vignette : Mais non = Ménon)

- p. 15 Lunelotte s'attendait à travailler à partir de l'hypothèse : « N^2 pair » or voici que le Professeur Pythaclide introduit curieusement les nombres *impairs* !



On peut ici faire comparer les deux variantes et demander si l'une apparaît meilleure.

- p. 16 la démonstration du fait que le carré de tout nombre impair est un nombre impair peut être proposée antérieurement à la classe. Dans son raisonnement, Lunelotte ne précise pas pourquoi la somme de deux nombres pairs est un nombre pair. Ceci peut également faire l'objet d'un petit exercice.

- p. 17 les taupins proposent une variante plus élégante pour la fin de la démonstration.

On voulait prouver : $(N^2 \text{ pair}) \Rightarrow (N \text{ pair})$ et on a démontré :

$(N \text{ impair}) \Rightarrow (N^2 \text{ impair})$. Comment s'y retrouver ?

Les taupins donnent un coup de pouce à Lunelotte en déclinant le théorème des nuages et sa contraposée.

L'expression « raisonnement par l'absurde » n'a pas été introduite dans Logique sans bosse 1 et 2.

- p. 18 Lunelotte reconnaît le lien logique entre ces deux implications : l'une est la contraposée de l'autre.

Le symbole d'équivalence mathématique traduit la propriété démontrée : $(N \text{ pair}) \Leftrightarrow (N^2 \text{ pair})$. (Equivalence : fiche B3)

Chaque professeur jugera s'il veut ou non présenter ces deux raisonnements comme équivalents. Sur cette



ANALYSE DIDACTIQUE des séquences de la B.D du Volume 2

Les déductions du Professeur Pythaclide Au fil de la B.D

/...Les succssions dépressives et euphoriques des taupins amènent le Professeur Pythaclide à parler des arcs orientés ... /

p. 19 *Psychologies circulaires*

/... afin de définir le cosinus et le sinus d'un réel θ , d'évoquer les variations des fonctions correspondantes et d'en souligner le caractère borné ... /

P. 20 / ... et périodique. La ronde de Sin et Cos « modulo 2π » peut être l'occasion d'expliciter à la classe cette expression et la notation utilisée.

La muse des quantificateurs

Nouvelle diversion : Madame Pythaclide surgit pour déclamer ses vers. Ceux-ci sont prétextes à l'introduction des **quantificateurs**... « pour tout réel X ... » (cf fiche B4) .../

p. 21 / ... « il existe un X », à propos des *fonctions paires*. Il y a toujours difficulté dans une classe à faire comprendre ce qu'est une fonction *non-paire*. Le problème sous-jacent est celui de la **négation des quantificateurs**. (La fiche B6 y est consacrée)

p. 22 Les taupins en donnent un autre exemple à travers leur parodie sur les *fonctions bornées et non bornées*. Pour l'importance des **positions respectives des quantificateurs** dans la phrase, voir fiche B7.

p. 23 *Squatch / non squatch ?*

Nos taupes seraient-elles un peu myopes, ou absorbées par leurs cogitations ? De fait, une carapace vide ne semble pas leur poser problème. En guise de petite sieste agréable à son ombre, les taupins se lancent dans une partie de « A-non A ». Règle du jeu : l'un commence en lançant une phrase ; l'autre doit répondre en énonçant sa négation. Ceci permet d'introduire dans la B.D divers exemples de **négations d'assertions comportant ou non des quantificateurs**. La fiche B6 fait travailler sur cette séquence et sur ce thème.

p. 24 Poursuite du jeu. Lunelotte en a assez d'avoir sur le dos ces deux gaillards qui n'arrêtent pas de faire des maths, et elle le manifeste en intervenant mais chacun des deux jumeaux croit que c'est l'autre qui a lancé la phrase. Analyse logique de l'assertion « aucun élève ne travaille dans ces conditions » pour en décliner la négation. Lunelotte fait cesser la partie en branchant sa sono.

/... question, on pourra consulter les Bulletins de l'APMEP n°396 p.600 ; n° 398 p.565 à 568 ; n° 399 p.708 à 710 ; n° 405 p.445 à 455.



On retrouve les mêmes difficultés à propos des suites non arithmétiques, ou non géométriques ...





ANALYSE DIDACTIQUE des séquences de la B.D du Volume 2

Les déductions du Professeur Pythaclide Au fil de la B.D

p. 25 *Taupe qui peut*

L'irruption « hors-carapace » produit la débâcle ; La dernière scène du volume 2 s'inaugure au fond de la galerie avec une tasse de thé à la bergamote ... et la résolution d'une **équation avec radical**.

Une fiche de « Logique sur le terrain » y est consacrée.

p. 26 *Des racines en souterrain*

Sin simule à lui seul les questions du professeur et les réponses des élèves ... qui raisonnent ici manifestement **par implications successives** sans en dominer les lois...!

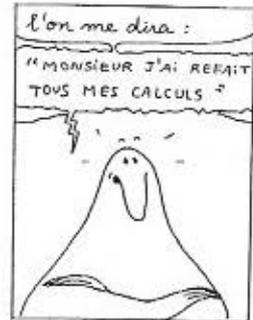
Cette séquence simule la recherche des solutions d'une équation radical et les méfaits d'un raisonnement par implications non maîtrisé.

p. 27 / ... ce qui constitue une véritable « infâmie ». On peut faire enquêter la classe sur les raisons qui scandalisent Sin ; et travailler la fiche B5 consacrée aux raisonnements par implications et par équivalences.

p. 28 Comment permettre aux élèves de réaliser leur erreur ? Prosaiquement, Sin va les engager à reporter les valeurs trouvées dans l'équation initiale ...!

p. 29 / ... et à leur faire constater que l'un des deux nombres ne vérifie pas l'égalité correspondante.
Diversion : le parapluie-ventouse de Lunclotte se décolle ... /

p. 30 / ... subitement pour venir se fixer sur le crâne du taupin Cos.



Hélas ! même les professeurs de mathématiques sont susceptibles de faire des fautes d'orthographe : "elle raffôle" ne prend qu'un "l"...

Entretiens parallèles

On retrouve au même moment Eugore et le Professeur Pythaclide sur leur bolide.

p. 31 Les deux entretiens parallèles soulignent les limites des raisonnements par implications ; de rebondissements en rebondissements mathématiques... **nécessité oblige !**

