16-17 TE09.qxd 7/07/09 21:00 Page 16

 par Michel Criton

Le rallye mathématique d'Alsace

Le rallye mathématique d'Alsace a été créé en 1973 par le professeur Georges Glaeser de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg. Inspiré des Olympiades internationales de mathématiques, il s'agit de la plus ancienne compétition mathématique en langue française.

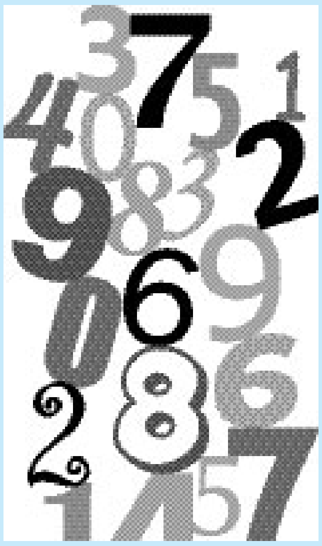
Le rallye mathématique d'Alsace s'adresse aux élèves de première et de terminale des lycées. Les élèves participent par binômes. Trois problèmes leur sont proposés (les énoncés sont différents pour les élèves de première et pour ceux de terminale) et ils disposent de quatre heures pour les résoudre et proposer une solution rédigée.
Chaque année, un rapport est publié qui contient les énoncés, les solutions, le palmarès et des idées originales rencontrées dans les copies. On trouve le rapport des quatre dernières années sur le site de l'Irem de Strasbourg :

http://irem.u-strasbg.fr/php/index.php

Un recueil de problèmes du Rallye mathématique d'Alsace a été publié aux éditions Bordas (collection Joker) sous le titre «Mathématiques de compétition», en 1990.

Sans répétitions (1re)

Déterminer combien il existe d'entiers naturels s'écrivant avec des chiffres tous distincts.



S'il n'en reste qu'un (1re)

Les nombres entiers de 1 à 2008 sont écrits au tableau. Parmi eux, on choisit deux nombres au hasard, on les efface et, à la place de l'un d'eux, on écrit leur différence (le plus grand moins le plus petit), l'autre nombre reste effacé.
On recommence jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un nombre écrit au tableau.

Ce dernier nombre est-il pair ou impair ?

Correction (1re)

Jean-Marc est professeur et commence à corriger un paquet de copies entre 15 heures et 16 heures. Il finit la correction entre 18 heures et 19 heures. Sur sa montre à aiguilles, il se rend compte qu'entre le début et la fin de la correction, les aiguilles des heures et des minutes ont exactement échangé leurs positions.

Combien de temps a-t-il mis à corriger ?

Les piquets (1re)

1) Les trois sommets d'un triangle sont situés à l'intérieur d'un carré de côté de longueur *c*.

Montrer que l'aire de ce triangle est inférieure ou égale à $c^2/2$.
On peut commencer par envisager le cas où l'un des côtés du triangle est parallèle à l'un des côtés du carré.

2) Dans un champ carré de côté de longueur 140 mètres, sont plantés au hasard 99 piquets.

Montrer que 3 d'entre eux au moins forment un triangle d'aire inférieure ou égale à 200 mètres carrés.

Rencontre polaire (Tle)

Un esquimau rencontre un explorateur et lui dit : « Tu peux trouver sans hésitation mon âge A, la longueur L de mon traîneau en centimètres et le nombre *n* de chiens de mon attelage sachant que mon âge est supérieur ou égal au double du nombre de chiens, le traîneau mesure entre 2 et 3 mètres, le produit des trois nombres cherchés vaut 50127 et la longueur du traîneau en centimètres est supérieure ou égale à sept fois mon âge. »

L'esquimau a-t-il raison ?

Carré tronqué (Tle)

Le nombre 31 a pour carré 961 ; si on enlève les deux derniers chiffres de ce carré, on obtient le nombre 9 qui est lui-même un carré. Il en est de même pour le nombre 60.

Trouver tous les nombres entiers strictement supérieurs à 9 qui vérifient la même propriété.

Chemins auto-évitants (Tle)

On dispose d'un échiquier rectangulaire comportant trois lignes et *n* colonnes.
Une tour est placée sur la case inférieure gauche et on l'amène sur la case supérieure gauche de la manière suivante : elle peut passer d'une case à une case contiguë (côté commun) mais ne peut pas repasser par une case qu'elle a déjà occupée auparavant (sa trajectoire est dite « auto-évitante »).
On note R(*n*) le nombre de chemins possibles sur un tel échiquier.

1) Déterminer R(n) pour n = 1, 2 et 3.
2) Déterminer R(4) et R(5).
3) Proposer une méthode pour déterminer R(2009).

La suite des unités (Tle)

On construit une suite de chiffres de proche en proche de la manière suivante : on part de deux chiffres *a* et *b*.
Le troisième, disons *c*, est le chiffre des unités de la somme $a + b$.
Le quatrième est le chiffre des unités de la somme $b + c$. On continue ainsi le processus.

1. Montrer que si l'on connaît deux termes consécutifs d'une telle suite alors on peut calculer tous les termes de la suite.
2. Quels sont les deux premiers termes de la suite telle que le 2007e terme vaut 2 et le 2008e terme vaut 6 ?
3. Montrer qu'une suite construite par ce processus est toujours périodique.