par Isabelle Bloch

Le flocon de Von Koch

… quelle drôle d'aire !

Comment organiser le passage d'une activité mathématique, si elle est avérée, à des savoirs mathématiques décontextualisés et réutilisables ? Nous pensons que les élèves ont besoin de *faire* des mathématiques, d'expérimenter, de travailler dans des situations de recherche, afin de pouvoir, ensuite, comprendre le formalisme et se convaincre de son efficacité. Nous avons donc proposé des situations pour le début de l'enseignement de la notion de limite, afin que les élèves puissent conjecturer, calculer, et valider leurs hypothèses. Le flocon de Von Koch nous fournit un exemple d'une telle situation.

Isabelle Bloch *est professeure à l'université Bordeaux-IV et à l'IUFM d'Aquitaine.*

Annie Bessot *appartient au laboratoire d'informatique de Grenoble et à l'IREM (Université de Grenoble).*

Référence : *Les fractales, réflexions et travaux pour la classe. IREM de Poitiers. http://irem.campus.univ-poitiers.fr/irem/index1.htm .*

Les exigences de l'enseignement des mathématiques (et plus particulièrement l'analyse) à l'entrée à l'université conduisent à l'échec de nombreux étudiants, y compris ceux qui réussissaient tout à fait convenablement en fin d'études secondaires scientifiques. Il s'ensuit un désinvestissement des études scientifiques que l'on observe dans tous les pays industrialisés.
Ainsi notre recherche se centre sur les questions suivantes : comment gérer la transition entre l'enseignement secondaire et l'université ? Comment adapter l'enseignement de l'analyse au public actuel des étudiants, afin de former des scientifiques ? Que considérons-nous comme méthode d'enseignement satisfaisante, du point de vue de l'activité des étudiants ?

Faire des mathématiques, expérimenter

Nous pensons que les élèves ont besoin de faire des mathématiques, d'expérimenter, de travailler dans des situations de recherche, afin de pouvoir, ensuite, comprendre le formalisme et se convaincre de son efficacité. Nous avons donc proposé des situations pour le début de l'enseignement de la notion de limite, afin que les élèves puissent conjecturer, calculer, et valider leurs hypothèses. Ces situations se sont avérées efficaces, amenant les élèves à se poser de vraies questions sur la façon de prouver qu'une suite admet une limite finie ou infinie.

Aire et périmètre d'un objet fractal

L'une d'elles est la recherche du périmètre et de l'aire d'un objet fractal, le ***Flocon de Von Koch***, qui est la figure « ultime » – la limite à l'infini – obtenue dans la construction itérée de figures, en partant d'un triangle équilatéral et en coupant chaque segment en trois : on enlève le segment du milieu et on le remplace par deux segments de même longueur, à l'extérieur (si on le fait à l'intérieur, on obtient l'anti-flocon). Or, à l'issue de ce processus, le périmètre de la « figure » obtenue est infini et l'aire finie… Cette dialectique entre deux types de limites a pour but de faire élaborer des raisonnements sur les conditions pour qu'une suite mathématique admette une limite finie ou infinie.
La formule que l'on obtient pour le périmètre de la n-ième construction F_n est :

$$P_n = P_0 \times (4/3)^n.$$

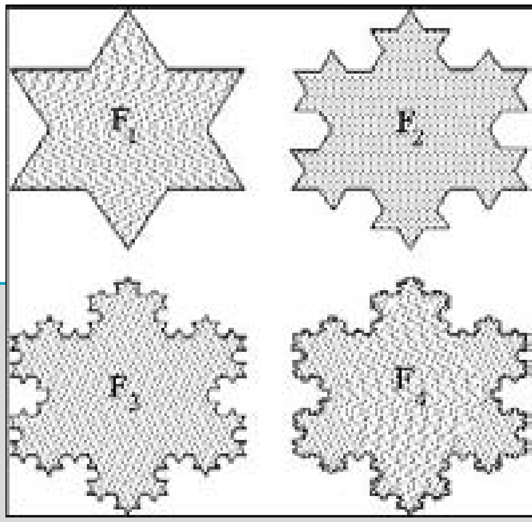
L'aire de la énième figure est plus difficile à trouver, il faut connaître la formule de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique et l'on trouve : $A_n = A_0 + \frac{3}{5} A_0 \left[1 + \left(\frac{4}{9}\right)^n \right]$.

Les élèves sont alors amenés à calculer avec leur calculatrice, aussi loin qu'ils le peuvent : ces calculs, qui par ailleurs leur demandent une vraie expertise dans le maniement des outils technologiques, leur permettent de conjecturer le « comportement » de P_n et A_n ; éventuellement de s'étonner que l'aire et le périmètre aient un com-

portement manifestement si divergent, alors qu'une conviction courante est que l'aire et le périmètre d'une figure doivent être parents dans leur conduite, finis, ou infinis, tous les deux.
Dans une classe d'élèves scientifiques de 17 ans, la moitié des élèves pense que P_n « reste fini », et l'autre moitié que P_n « grandit autant que l'on veut ». On va donc montrer que $\lim_{n \to \infty} P_n = +\infty$

Cela se fait avec l'inégalité d'Euler :
$(1+a)^n > 1+na$. Puis $4/3 = 1 + 1/3$, d'où :
$P_n > 1 + n/3$. Donc, il suffit de prendre $n = 3 \times 10^p$ pour avoir $(4/3)^n > 10^p$.
Pour l'aire, malgré l'évidence (le flocon est inscrit dans le cercle circonscrit au triangle), les élèves veulent trouver l'aire « finale » ; remarquons que si l'on part d'un triangle équilatéral de côté a entier, alors $A_0 = a\sqrt{3/4}$, donc A_0 est irrationnel. C'est une valeur importante de cette variable didactique, car cela empêche les élèves d'essayer « d'attraper » la limite avec des décimaux. Ils doivent prendre en charge un raisonnement pour trouver la limite de l'aire, par exemple en montrant que $(4/9)^n$ peut être rendu plus petit que 10^{-p} pour tout p.
Des questions demeurent : les autres notions d'analyse – dérivée, intégrale, séries – sont en général introduites d'un point de vue formel. Comment doser l'introduction de situations de recherche dans le cours d'analyse, et articuler ces situations avec les formulations usuelles des théorèmes ? Où les situations à dimension heuristique sont-elles nécessaires, et où peut-on s'en passer ? Les recherches sont ouvertes !

I. B.



Le Flocon de Von Koch, de F_1 à F_4.

Situations et problèmes

« Quatre expériences effectuées en 1973-1974 ont montré (voir *Hasard ou Statistiques ?* page 14) théoriquement et expérimentalement qu'il n'est pas nécessaire de réveiller les obstacles épistémologiques liés à la notion de hasard, de chance, et de probabilité pour introduire la mesure d'évènements et comprendre la démarche de la statistique inférentielle. Dans un dispositif quasi constructiviste, les situations pouvaient s'enchaîner par les questions qu'elles posent et pas seulement par les connaissances mathématiques qu'elles produisent. Il restait évidemment pour plus tard à établir, par des mathématiques plus formelles, la consistance du choix de la fréquence théorique comme mesure de probabilité dans une expérience unique. Tout le processus repose sur un jeu (une dialectique) entre les connaissances – des énoncés dont on n'est pas sûr et que l'on peut comparer à des hypothèses – et des savoirs – des énoncés de référence dont la validité et l'adéquation sont assurées (par la culture). Cette recherche a fait découvrir aussi les limites du constructivisme et l'impossibilité du constructivisme radical. » (Guy Brousseau)
Les textes de mathématiques sont uniquement composés de savoirs (énoncés vrais et de référence). En cachant le jeu des connaissances, ils donnent une image déformée de l'activité mathématique réelle qui accompagne la production et l'usage de ces textes. Les problèmes tentent de susciter cette activité mais lors de correction, la démarche se révèle seulement comme une démonstration, c'est-à-dire un texte. Un problème est un théorème transformé en question–réponse. Les situations (en théorie des situations mathématiques) sont aussi des théorèmes mathématiques transformés, qui ont pour objet de pallier à l'insuffisance des problèmes, et permettre de façon plus visible le jeu des connaissances.
Une fois les savoirs à enseigner déterminés institutionnellement, la réflexion traditionnelle porte sur l'ordre dans lequel ils doivent être enseignés, sur ce que l'élève devrait savoir au vu des enseignements antérieurs qu'il a reçus, et sur ce qu'il devrait donc pouvoir apprendre de nouveau. Se restreindre au contrôle de l'acquisition des savoirs de référence pour décider de la possibilité d'en construire explicitement de nouveaux est parfaitement légitime, si, par ailleurs, les connaissances qui doivent les précéder et les accompagner ont la possibilité de jouer leur rôle. Mais lorsque la programmation exclusive de la construction des textes par des textes étouffe toute possibilité de les connaître – c'est-à-dire de les utiliser librement comme connaissances –, l'apprentissage périclite.
Il y a peu de chances en général que les causes (universelles) d'apprentissage d'une connaissance correspondent à des raisons de la savoir. Ce sont des processus différents et la conjonction de l'un avec l'autre est le but principal de l'enseignement. Le professeur doit organiser des conditions qui vont être des causes de l'apprentissage de ses élèves. Son ambition doit être de faire en sorte que l'élève conçoive ces causes comme des raisons de savoir ce qu'on veut lui enseigner. Mais les textes de mathématiques ne donnent au professeur que leurs raisons mathématiques de validité. Il doit donc mettre en œuvre cette double conversion de raisons et de causes. Un problème détermine un savoir par les preuves de sa validité, une situation tente d'y ajouter la preuve de sa nécessité dans le sens de son utilité.

Annie Bessot