par A.Mercier et G.Sensevy

Vers une action conjointe professeur–élève

Les éléments présentés ici proviennent d'un observatoire des pratiques mathématiques installé dans un lycée, durant un an. Les élèves et le professeur d'une classe de première S ont été suivis à l'aide de questionnaires et d'entretiens systématiques (trimestriels avec les élèves, hebdomadaires avec le professeur) et par l'enregistrement des préparations, cahiers de cours et d'exercices, copies, corrections rendues, sans jamais pour autant entrer en classe.

Les études de didactique s'intéressent à la vie des savoirs, en classe, et à ce que le professeur pourrait en changer. Nous considérons que les mathématiques vivantes, en classe comme ailleurs, sont des pratiques matérielles écrites, orales, et gestuelles, qui peuvent être observées avec profit, chez les élèves comme chez les professeurs (Matheron, 2009).

Une étude de cas

Sabine est une élève de première S, « bonne en géométrie, elle a des difficultés en algèbre ». Sur les cinq pages de calculs qu'elle a rendues le 30 septembre, pour la première interrogation, un seul résultat est exact et sa première note est donc 1,5/20. Par exemple, elle écrit :

Donc nous avons le produit de 2 facteurs ; il faut et il suffit que l'un des deux soit égal à 0. Il y aura donc deux solutions : 4m = 0 ou bien 2m + 3 = 0 ⇔ m = 1/4 ou 2m = 3, m = 3/2.

Elle expose son raisonnement mais passe de $4m = 0$ à $m = 1/4$ en suivant la « règle implicite de conservation de l'information » (il ne faut pas faire disparaître le 4). L'erreur est fréquente même chez des élèves qui savent parfaitement la corriger. Elle fait une faute d'inattention. Sabine essaie de procéder comme en géométrie, où elle réussit bien : elle énonce un théorème. Elle pense que, pour progresser en algèbre, il lui faut prendre des décisions de calcul et déclarer ses actions pour en contrôler les justifications. Cela va bien en géométrie et le professeur l'accepte :

[…] je projette A orthogonalement en A' sur P' et je cherche la distance AA'. Si AA' > 2 alors ensemble vide, si AA' = 2 alors 1 pt […].

Sabine considère donc, sans le dire, que ses calculs sur des formules ont un statut semblable au travail graphique sur une figure, en géométrie. Cela donne :

$$\frac{1}{6x^2-5x+1}-\frac{1}{2x^2+3x-2}<0$$

! *je mets au même dénominateur*

$$\frac{(2x^2+3x-2)-(6x^2-5x+1)}{(6x^2-5x+1)(2x^2+3x-2)}<0$$

....

! *je cherche le signe de* $-4x^2+8x-3$

Le professeur, surpris, marque un point d'exclamation rouge dans la marge. Comme la plupart des professeurs, il considère qu'exécuter un calcul n'est pas raisonner, il n'y a pas besoin d'explications, parce qu'il n'y a qu'à « faire sans y penser ». Cette opposition semble procéder d'une dichotomie didactique entre deux formes de transmission, l'une se prêtant au conditionnement, l'autre non, plutôt qu'à une réalité épistémologique et mathématique.

Pour Sabine, comme le tracé d'une projection orthogonale sur une figure de géométrie permet de mobiliser un théorème, un calcul à faire doit être argumenté *a minima* par l'énoncé du résultat attendu. Le professeur ne suit pas Sabine sur ce chemin. Pour se développer efficacement, sa stratégie demanderait des explications qui n'ont pas de place, ni dans les pratiques algébriques scolaires, ni dans les théories acceptées. Nous observons ainsi qu'une action conjointe du professeur et de l'élève est indispensable à la réussite de l'enseignement, mais que cela demande qu'ils puissent partager des objets épistémologiques

Références :

• *Matheron Y. (2009), Mémoire et étude des mathématiques. PUR.*

• *Mercier A. (1998), La participation des élèves à l'enseignement. Recherches en Didactique des Mathématiques, 18–3, 279–310.*

• *Sensevy G. (1998), Institutions didactiques. Étude et autonomie à l'école élémentaire. Paris : PUF.*

• *Sensevy, G., Mercier, A. (2007), Agir ensemble, l'action didactique conjointe des professeurs et des élèves. PUR.*

fondamentaux : comment justifier un calcul, comment en garantir l'exactitude, comment la différence algèbre–géométrie joue-t-elle dans la différence calculs–raisonnements, ce qui n'est pas le cas.

Objectifs de l'action conjointe

L'un des objectifs de la théorie de l'action conjointe en didactique consiste à étudier quelles sont les conditions nécessaires à l'établissement et au développement de cette action : des conditions liées au savoir – l'épistémologie de l'algèbre – sont entrelacées à des grandes structures d'action scientifique – les techniques de justification–garantie du travail algébrique – et à des conditions liées aux formes de transactions didactiques. L'absence de dialogue épistémique (référant à du savoir) et épistémologique (relatif aux formes du savoir) entre professeur et élève empêche ici le travail conjoint.

Ce dialogue est une des conditions essentielles d'un apprentissage « dense », dans lequel l'élève est à l'origine d'une enquête personnelle que le professeur suscite puis accompagne. Il n'en est pas le tout. C'est donc en dehors de la classe que nous observons comment les très bons élèves travaillent et apprennent par eux-mêmes, en explorant la voie que le professeur a ouverte. Et inversement, on peut observer aussi comment des élèves en grande difficulté réussissent à détourner les enjeux épistémiques des tâches que le professeur propose et comment ils évitent alors de jouer le jeu didactique, souvent à l'insu du professeur.

A.M. & G.S.

Alain Mercier *est professeur à l'université de Provence.*

Gérard Sensevy *est professeur de sciences de l'éducation à l'IUFM de Bretagne*

Yves Chevallard *est professeur à l'université de Provence.*

Vers un enseignement fonctionnel ?

La *théorie anthropologique du didactique* où ce propos s'inscrit conduit à regarder l'enseignement des mathématiques comme plongé dans un univers plus vaste, celui de l'école d'abord, celui de la société ensuite, celui de toute une civilisation enfin, en vue d'analyser au plus large les conditions et contraintes qui ont façonné cet enseignement et qui, aujourd'hui, le défont. Or l'analyse aboutit depuis des années à ce constat : l'enseignement des mathématiques achève aujourd'hui un cycle de vie historique de deux siècles et demi environ. Les attaques contre lui sont des pathologies opportunistes qui profitent de son affaiblissement : même si elles peuvent se révéler fatales, elles ne sont pas l'origine du mal. Le diagnostic est que l'enseignement des mathématiques s'est installé depuis longtemps dans un paradigme de la *visite des savoirs*. Pour cette raison, le contrat qu'est censé honorer tout enseignant, et qui transcende sa « liberté pédagogique », s'exprime en termes de savoirs visités, c'est-à-dire enseignés, à la manière dont on visite les monuments du passé ou d'aujourd'hui (décimaux, fractions, symétries, valeurs absolues, dérivées, nombres complexes, etc.). Chacun d'eux est une œuvre réputée précieuse, à laquelle l'élève doit rendre hommage en apprenant fugitivement à calculer sur des décimaux ou des fractions, etc., mais dont il ignore pourquoi elle est là et quelles en sont les raisons d'être. Pourquoi ainsi visiter les angles, ou le parallélisme de droites, ou le calcul algébrique, ou la notion de valeur absolue ? Bref, enseignement et apprentissage des mathématiques sont aujourd'hui des activités largement *formelles* et immotivées. Par contraste, un enseignement *fonctionnel* des mathématiques, qui mettrait les *fonctions* assumées par les objets mathématiques au cœur de la rencontre avec ces objets, ne parvient pas à prendre son essor. Son avènement suppose un changement historique de paradigme didactique, qui conduise de la visite des savoirs à un paradigme de *questionnement du monde* fondé sur un schéma tout simple d'allure : une question Q étant posée, la classe cherche à lui apporter une réponse R validée (et satisfaisant quelques autres contraintes spécifiques : on ne répond pas identiquement à la même question dans une classe de 4^{e} et dans une classe de terminale S par exemple). Il s'agit là du schéma de base, hors de l'école du moins ; et c'est de ce schéma que des travaux de didactique en nombre croissant s'efforcent d'étudier les conditions d'implantation réussie à l'école. Lorsque, sous la direction de son professeur, une classe enquête sur une question Q, on la voit cheminer le long de ce qu'on nomme un *parcours d'étude et de recherche* (PER) tracé non seulement par l'inventivité de la classe – c'est la part propre de « recherche » – mais aussi par la rencontre nourricière avec des « œuvres » (mathématiques et autres) dont l'étude est alors concrètement *finalisée* par la volonté de répondre à la question posée. Dans une classe de 4^{e}, un PER a trait aux nombres qu'on peut construire géométriquement, à l'instar de $\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$ ou de $\sqrt{11} = \sqrt{6^2 - 5^2}$; cela conduira la classe à s'interroger notamment sur les entiers sommes ou différences de deux carrés, questions dont le traitement sera différent, les outillages mathématiques requis étant, dans un cas, du niveau du collège, dans l'autre d'un tout autre niveau. Chemin faisant, tout en découvrant des usages fonctionnels du calcul algébrique (si $n = 2p + 1$, on a $n = (p + 1)^2 - p^2$, par exemple), la classe rencontrera l'essentiel de la géométrie du collège et pourra même, si cela est fonctionnellement justifié, aller un peu au-delà. Un ensemble fini de PER permet ainsi une rencontre fonctionnelle avec la quasi-totalité des œuvres désignées par le programme actuel – en attendant, demain, un programme formulé en termes de *questions*, le professeur ayant alors à répondre des questions qu'il aura fait étudier à sa classe et des réponses qui leur auront été apportées. La voie que désignent les recherches actuelles à cet égard est celle d'un passage de l'enfermement disciplinaire régnant à la pratique de l'enquête *codisciplinaire*, qui permettrait enfin aux mathématiques d'apparaître pour ce qu'elles sont : l'un des nerfs de la guerre pour comprendre de façon critique le monde naturel et humain et y agir raisonnablement. Pour s'en assurer, le lecteur pourra par exemple entamer un PER personnel sur cette question : à propos de développement durable, nombre d'auteurs avancent que, sans l'effet de serre, la température moyenne du globe, supposée de 15 ºC, serait de –18 ºC ; mais comment donc sont fabriquées ces valeurs numériques, dont la seconde ne saurait avoir été mesurée ?

Yves Chevallard