par Didier Nordon

Le naturaliste et le mathématicien

En même temps que les exemples, les mathématiciens manipulent sans cesse les contre-exemples. Les premiers aident à faire des conjectures, les seconds aident à rejeter les conjectures trop rapides.

Un célèbre mathématicien contemporain, Jean-Pierre Serre, atteste avec quelle peine le chercheur avance. Un article qu'il a écrit sur les « sous-groupes ouverts des groupes profinis » lui a donné tellement de mal, raconte-t-il, que, jusqu'au bout, il n'arrivait pas à savoir s'il démontrait le théorème ou s'il construisait un contre-exemple !

Le trèfle se nomme ainsi parce qu'il a trois feuilles (en latin, *trifolium*). Cependant, on trouve quand même, paraît-il, des trèfles à quatre feuilles. Le naturaliste y verra une exception qui mérite d'être étudiée en tant qu'accident génétique, mais ne remet pas en cause le fait que le trèfle a trois feuilles. Le mathématicien, lui, y verra un contre-exemple. Or un contre-exemple suffit à rejeter une conjecture (alors que mille exemples ne suffisent pas à la démontrer). Le trèfle à quatre feuilles lui interdira donc toute affirmation générale sur le nombre de feuilles du trèfle. Du moins s'agit-il là du mathématicien tel qu'il aime à se caricaturer lui-même. En pratique, il est plus nuancé.

Rôle de l'exemple et du contre-exemple

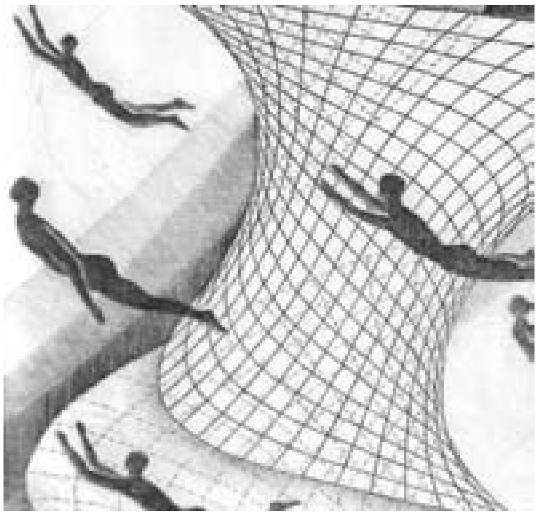
La notion d'exemple est plus générale que celle de contre-exemple. Tous les énoncés sont, en principe, susceptibles d'être illustrés par des exemples. Tous ne risquent pas d'être réfutés par un contre-exemple. Comment opposer un contre-exemple à un énoncé du genre : « Il existe au moins un élément ayant telle propriété » ? Un contre-exemple est souvent une surprise. Il contredit un énoncé qu'on croyait vrai. Du coup, ce qu'un mathématicien moyen considère comme un contre-exemple peut n'être qu'un exemple aux yeux d'un mathématicien plus averti. Pour un débutant qui confond continuité et dérivabilité, une fonction continue non dérivable est un contre-exemple ; pour un professionnel, elle ne réfute rien.
Les mathématiques, dit-on, se composent de démonstrations, de contre-exemples - et de beaucoup de travail. Cette boutade se justifie par le fait que, dans le corpus publié, seuls la démonstration et le contre-exemple jouissent du statut de preuves. A ce titre, le contre-exemple fait, autant que la démonstration, partie de l'apprentissage. Parmi les manuels proposés aux étudiants, se trouvent plusieurs recueils de contre-exemples. Mais le moment le plus actif, celui où les mathématiques sont en train de se faire, est caractérisé par l'omniprésence des exemples.
Quand un mathématicien s'attaque à un problème, en effet, il cherche à aiguiser son intuition, sa perception, son *feeling*, pour acquérir avec les objets une familiarité qui ne se réduise pas à ce qu'il sait démontrer. « Qu'est-ce qui se passe ? » est la question. Il multiplie les « petits calculs » ou les « petits dessins » portant sur des cas accessibles, exemples particuliers de la situation générale qu'il explore. Avant d'essayer de démontrer quoi que ce soit, il lui faut avoir une idée de là où il veut, ou croit pouvoir, aller. Cette idée peut naître de l'examen de cas, qui finissent par faire germer quelque affirmation. Il exprime cette dernière sous forme d'une conjecture aussi précise et générale que possible (puisque les deux vont souvent de pair), l'expérimente sur des exemples, en parle avec des collègues et, seul ou avec eux, la démontre. Ou la réfute par un contre-exemple. Ou la laisse de côté. Ou la transforme. Ou la publie telle quelle.
Conjecturer est une façon de réfléchir. Parfois, en cherchant un contre-exemple à une conjecture, en n'y parvenant pas, puis en analysant les causes de cet échec, il améliore sa compréhension et est mis sur la piste d'une démonstration de la conjecture. D'autres fois, en trouvant un contre-exemple à une conjecture, il voit comment la modifier pour aboutir à une conjecture différente, qu'il parvient,

celle-là, à démontrer. Ainsi va le jeu constant de l'exemple et du contre-exemple, le premier encourageant le mathématicien à hasarder une idée générale, le second lui servant de garde-fou

Le fait que la notion d'exemple s'applique à un objet ou à une situation (un exemple de tel objet, un exemple de telle situation) alors que celle de contre-exemple s'applique à une affirmation (un contre-exemple à telle affirmation) ne doit pas faire croire à une distinction tranchée entre ces deux notions, car il n'y a pas de distinction tranchée entre objet et affirmation. Un des efforts de rigueur accomplis par les mathématiques est de codifier les affirmations pour en faire des objets soumis aux règles de la logique (ainsi, « P implique Q » est le même objet que « non Q implique non P »). Inversement, un objet peut jouer le rôle d'une affirmation. En effet, le mode d'existence des objets mathématiques suscite des divergences. Si je dis l'«ensemble des réels», j'ai l'air de ne faire que désigner un objet. En fait, j'affirme implicitement que les réels forment un ensemble. Comme cet ensemble est infini, je prends ainsi parti sur des questions qui furent polémiques et le redeviendront peut-être : peut-on admettre des ensembles infinis ? Si oui, lesquels ?

Injustices et mésaventures

Pour triompher d'une difficulté, il faut tantôt s'obstiner dans la même direction, tantôt changer rapidement d'idée et essayer autre chose. Aucun critère formalisé ne dit quelle attitude est adaptée. Affaire d'intuition. De même, c'est l'intuition qui avertit un mathématicien que tels et tels cas, apparemment divers, ont quelque chose de commun ; c'est elle qui l'incite à s'évader de la stricte description de ces cas pour conjecturer quel peut bien être ce quelque chose encore indistinct, dont ils deviennent alors des exemples. Le saut qui fait passer de la description à la conjecture relève de l'imagination, de l'intuition. Ces aptitudes créatives sont très injustement réparties. Concevoir une idée qui met un ordre dans le chaos du réel n'est pas donné à tous. L'origine d'une idée garde toujours une part de mystère.



Les procédés des mathématiciens ne sont pas toujours aussi idéaux. Beaucoup d'articles n'explorent pas d'idée. Ils se contentent de faire agir une technique dans des cas variés, mais sans surprise. Un autre travers peut naître de l'excès d'abstraction. Il est arrivé à certains d'introduire des objets possédant telles et telles propriétés, sans s'apercevoir que, ces propriétés étant incompatibles, aucun objet ne répondait aux exigences posées ! Incompatibilité qui leur serait apparue s'ils avaient cherché des exemples des objets qu'ils prétendaient définir. Beaucoup d'histoires courent, pas toutes fausses, à propos de théorèmes rigoureusement démontrés dont les conditions de validité sont impossibles à réaliser. Des théorèmes vrais, mais qui ne s'appliquent jamais !

Il existe aussi des théorèmes démontrés, mais faux ! La rigueur n'est pas sans faille, comme en attestent certains épisodes amusants (voir l'encadré ci-dessus). Parmi les erreurs que les contre-exemples permettent de détecter, il en est qui ruinent tout. Il en est aussi qui n'ont pas d'effet plus grave que de conduire vers un théorème autre que celui qu'on avait cru démontrer.

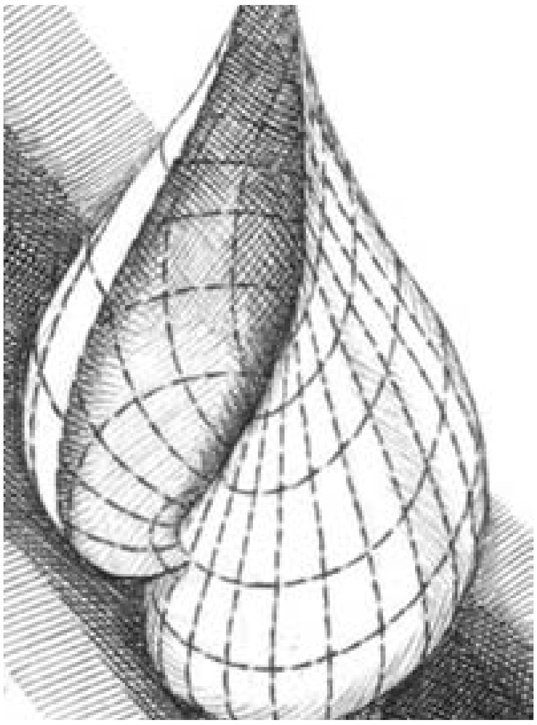
Sécher est le pain quotidien des mathématiciens. Les moments d'illumination sont plus rares que ceux de marasme. Aussi n'y a-t-il pas de honte à publier une conjecture. Il faut seulement s'assurer, en en discutant, qu'elle n'est pas susceptible de recevoir une réponse facile : passer à côté d'une évidence sans la voir est fréquent. Presque tous les mathématiciens sont conduits à avancer des conjectures. Les bonnes incitent au mouvement, jettent un éclairage nouveau, subodorent un lien inattendu entre des domaines qui paraissaient disjoints. Elles offrent un matériau sur lequel on peut construire. Au risque d'une « croissance hors-sol ». Par exemple, on démontrera que « si la

Enoncé confirmé mais faux !

La géométrie algébrique est une spécialité ardue. Néanmoins, elle peut être le théâtre de péripéties comiques. En 1933, Wilhelm Grunwald démontra et publia un théorème auquel, en 1942, George Whaples apporta une nouvelle démonstration, plus simple. Cela n'empêcha nullement, en 1948, Shianghaw Wang d'y trouver un contre-exemple ! C'est que Grunwald et Whaples s'étaient, l'un, puis l'autre, trompés. Ayant analysé leurs erreurs, Shianghaw Wang proposa des conditions plus restrictives sous lesquelles le théorème devenait vrai. Ainsi, en prêtant à sourire, le « théorème de Grunwald » a acquis une célébrité débordant le cadre des spécialistes auxquels il était destiné !

RÉFÉRENCES :

- Jean-Paul Delahaye, *Merveilleux Nombres premiers,* Belin/Pour la science, 2000.
- Une interview de Jean-Pierre Serre, Revue de la Filière Mathématique, RMS, Vol. 114, n° 3, mai 2004.



conjecture de X est vraie, alors celle de Y l'est aussi ». Un tel lien peut renforcer la vraisemblance des deux conjectures, ou la diminuer (selon les cas), mais ne prouve ni l'une ni l'autre. Les mathématiques évoluent là aux limites de la fiction...

Questions d'interprétation

Le théorème sur les sommes de carrés (voir l'encadré en page 4) a des analogues pour les sommes de cubes, de puissances quatrièmes, etc. (voir l'encadré ci-contre). On démontre que tout entier est somme d'au plus huit cubes, sauf 23 et 239 qui en exigent neuf. Devant ce phénomène, certains mathématiciens réagissent comme le naturaliste devant le trèfle à quatre feuilles ; ils considèrent que 23 et 239 sont des bizarreries peu significatives : l'essentiel est ce qui se passe pour les entiers « assez grands ». D'autres estiment que le phénomène dit quelque chose sur la nature des nombres entiers, surtout que des exceptions analogues existent pour les sommes de puissances k-ièmes ; le cas des sommes de carrés est exceptionnel, en ce sens qu'il est le seul à ne pas contenir d'exceptions (!) ; la présence d'exceptions, en théorie des nombres, est un phénomène trop fréquent pour être dépourvu de signification. Si on les interroge, les mathématiciens disent à laquelle de ces attitudes ils se rangent, mais il n'y a pas de débat au sein de la profession. Sans doute estime-t-elle que ces attitudes expriment des sensibilités personnelles, dont il n'y a pas à discuter.

Continuons de nuancer l'histoire du trèfle, décidément trop carrée pour être mathématique ! Pourquoi les mathématiciens la racontent-ils, sinon parce qu'ils ont conscience du risque qu'elle caricature, contre lequel ils doivent réagir ? Se tenir à une conception rigide de l'opposition vrai/faux serait, de leur part, manquer de perspicacité. Quand un objet vient à l'encontre d'un énoncé général, ils doivent distinguer s'il est un contre-exemple ruinant définitivement l'énoncé ou s'il n'est qu'une exception. A cette fin, ils savent donner un statut aux exceptions. Beaucoup de théorèmes ont des énoncés du genre : «Presque tous les éléments de tel ensemble possèdent telle propriété », ou : « La probabilité que tel élément ait telle propriété est au moins égale à tant ». Le sens technique de ces expressions correspond bien à ce qu'un non-spécialiste comprend en les entendant.

Le problème de Waring

Soit k un entier. Il existe un nombre, noté $g(k)$, tel que tout entier soit somme d'au plus $g(k)$ puissances k-ièmes. Il existe également un nombre, noté $G(k)$, tel que tout entier assez grand (c'est-à-dire tout entier sauf au plus un nombre fini d'exceptions) soit somme de $G(k)$ puissances k-ièmes. Selon le théorème de Lagrange (encadré page 2), $g(2) = G(2) = 4$. Mais, en général, $G(k)$ est beaucoup plus petit que $g(k)$, car la valeur de $g(k)$ est augmentée par la difficulté de représenter certains nombres relativement petits.
Calculer $g(k)$ et $G(k)$ pour tout k n'est pas complètement résolu. Ce problème est appelé « problème de Waring », en référence à une affirmation publiée sans démonstration en 1770 par Waring (1736-1798) : « tout entier est somme d'au plus 9 cubes, 19 puissances quatrièmes, etc. ».

Se méfier des exemples

Un sujet cher à la théorie des nombres est l'évaluation du nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre donné, x. C'est une fonction notée $\pi(x)$. On ne sait pas exprimer sa valeur exacte, mais Gauss a observé qu'une bonne approximation de $\pi(x)$ est le logarithme intégral, li(x), c'est-à-dire la primitive de la fonction 1/ln(x) qui s'annule pour x = 2. On démontre que, quand x tend vers l'infini, la différence $\pi(x)$-li(x) change une infinité de fois de signe. Toutefois, le plus petit changement de signe a lieu pour une valeur de x située au-delà de ce que les ordinateurs actuels peuvent calculer . Si on se fondait sur la seule expérience numérique, on croirait avoir les meilleures raisons de conjecturer que $\pi(x)$ est toujours inférieure à li(x). En termes de trèfle, l'analogue de cette situation serait : on sait, pour des raisons théoriques, qu'il existe une infinité de trèfles à quatre feuilles, mais personne n'en a encore jamais vu un seul !

D.N.