Exemples

Débloque-notes

par Odon Drindier

Qu'est-ce qu'un contre-exemple? Pourriez-vous m'en donner un exemple,afin d'illustrer cette notion? Mais un exemple de contre-exemple constituera-t-il un exemple ou un contre-exemple?
Si un contre-exemple est le contraire d'un exemple, un exemple de contre-exemple est un exemple du contraire d'un exemple. On peut conjecturer qu'il n'existe pas de différence notable entre un exemple de contraire d'exemple, et le contraire d'un exemple d'exemple.
En partant du concept d'«exemple de contre-exemple», nous sommes parvenus à celui, plus simple, semble-t-il, d'«exemple d'exemple».
En effet, un exemple d'exemple ne peut être autre chose qu'un exemple. Le contraire d'un exemple d'exemple est donc, modulo notre conjecture, le contraire d'un exemple, soit un contre-exemple. La réponse à la question posée plus haut serait donc: «un exemple de contre-exemple constitue un contre-exemple, et non un exemple».

• Un contre-exemple à la conjecture d'Euler

Le mathématicien suisse **Léonhard Euler** (1707-1783)a conjecturé que pour $n > 2$, une puissance n-ième d'un nombre entier ne pouvait jamais s'écrire comme une somme de moins de n puissances n-ièmes de nombres entiers.
Il faudra attendre plus de 230 ans pour que deux mathématiciens, **L. J. Lander** et **T. R. Parkin**, trouvent un contre-exemple à cette conjecture:
$27^5+84^5+110^5+133^5=144^5$.
En 1988, Noam Elkies trouvera le plus petit contre-exemple avec des exposants égaux à 4:
$2682440^4+15\,365\,639^4+18\,796\,760^4=20\,615\,673^4$.

• Le cinquième nombre de Fermat

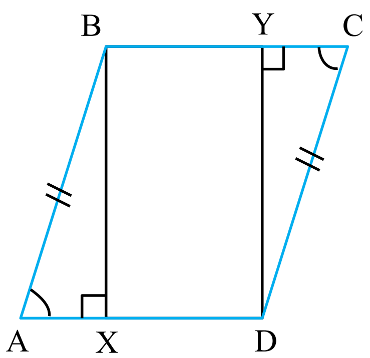
Un contre-exemple historique est celui du nombre $4294967297 = 2^{2^5}+1$.
Le mathématicien toulousain **Pierre de Fermat** (1601-1665) avait remarqué que les nombres $2^{2^0}+1=3$; $2^{2^1}+1=5$; $2^{2^2}+1=17$; $2^{2^3}+1=257$ et $2^{2^4}+1=65537$ étaient tous des nombres premiers (c'est-à-dire des nombres qui possèdent exactement deux diviseurs). Fermat avait alors conjecturé que c'était le cas de tous les nombres de la forme $2^{2^n}+1$.

Or, **Léonhard Euler** a montré en 1732 que $2^{2^5}+1=4294967297=641\times6700417$, et que ce nombre est donc un contre-exemple à la conjecture de Fermat.
Depuis, on a montré que pour $4<n<33$, les nombres de Fermat sont tous composés, et on ignore encore si le 33e nombre de Fermat est premier ou composé.

s de contre-exemples

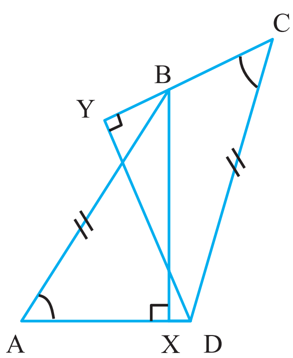
• TOUJOURS UN PARALLÉLOGRAMME ?

Soit un quadrilatère ABCD. Si $\widehat{A} = \widehat{C}$ =CD, alors ABCD est un parallélogramme.



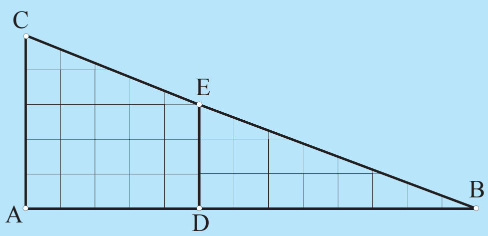
En effet, si nous traçons la perpendiculaire (BX) à (AD) et la perpendiculaire (DY) à (BC) comme sur la figure, nous obtenons deux triangles ABX et CDY isométriques, d'où BX = DY et AX = CY. On en déduit que BYDX est un rectangle et que ABCD est un parallélogramme.

Vous êtes convaincu?
Et bien, examinez le contre-exemple ci-dessous!



Les hypothèses de notre «théorème» ne sont-elles pas vérifiées? Tout-à-fait! Mais une hypothèse implicite dans la première figure, n'est pas vérifiée ici. Les points X et Y doivent appartenir tous les deux à des côtés du quadrilatère ou à des projections de ces côtés, ce qui n'est pas le cas dans la deuxième figure.

M. C.



• Théorème de Thalès

La figure ci-contre a été réalisée sur un quadrillage régulier à mailles carrées.
Le côté d'un petit carré est pris comme unité.
On vérifie que $\frac{DE}{BD} = \frac{3}{8} = 0{,}375$ ... et que $\frac{AC}{AB} = \frac{5}{13} = 0{,}384\,615$ ...

S'agit-il d'un contre-exemple au théorème de Thalès? Nullement! Cette figure est un exemple illustrant la contraposée du théorème de Thalès.
En effet, le théorème de Thalès appliqué au triangle affirme que:
si ABC est un triangle, si D un point de (AB), si E un point de (BC) et si (DE)//(AC), alors $\frac{BD}{DE} = \frac{AB}{AC}$.
Ici, nous avons $\frac{BD}{DE} \neq \frac{AB}{AC}$. Nous en déduisons que l'une des hypothèses du théorème n'est pas vérifiée. Quelle est cette hypothèse?

Réponse
L'hypothèse non vérifiée est «E appartient à (BC)».

Références *Life and Other Mathematical Amusements,* Martin Gardner, Wheels, Freeman, 1996.