par Didier Nordon

Les mathématiques, science expérimentale

Les mathématiciens perçoivent fortement l'existence d'une réalité extérieure à eux, qu'ils explorent. Cette foi en l'existence d'une réalité mathématique explique pourquoi ils n'accordent pas un statut fondateur à la logique. Ce n'est pas elle qui est première, mais la réalité.

La foi dans la solidité des mathématiques revient à tenir pour vraie la conjecture : « Notre système d'axiomes est consistant » ...

Les mathématiciens disent souvent que les mathématiques sont une science expérimentale. C'est une boutade que, au fond, ils prennent au sérieux. Elle imprègne leur pensée. Voici en quoi. On pourrait découvrir je ne sais quelle contradiction dans la botanique ou dans la physique, ce n'est pas cela qui ferait disparaître les arbres ou la matière. Leur réalité demeurerait. De même pour les mathématiques. Quand bien même on mettrait en évidence quelque contradiction en leur sein, la réalité qu'elles décrivent demeurerait et elles ne disparaîtraient pas. L'intuition des mathématiciens est pragmatique. Ils ne croient pas à la possibilité d'une contradiction. Cela ne les empêche pas d'en découvrir fréquemment ! Mais ils cherchent alors leur erreur , convaincus a priori que la contradiction ne gît pas dans les mathématiques : elle provient d'eux. De fait, l'erreur , ils finissent toujours par la trouver.

Allons de l'avant, la rigueur suivra

Les mathématiciens appuient la théorie des ensembles sur un système d'axiomes qui, pour l'instant, n'a pas donné de contradiction et ils agissent comme s'il devait ne jamais en donner . Une telle foi dans la solidité des mathématiques n'est pas irréprochablement fondée : elle revient à tenir pour vraie une conjecture (« Notre système d'axiomes est consistant ») qu'aucun contre-exemple n'a encore réfutée, certes, mais qu'ils ne savent pas démontrer . Ils sont peu nombreux à s'inquiéter de cette légèreté, parce que ce n'est pas la logique qui leur sert de garantie. C'est la réalité mathématique. Et puis, s'ils passaient trop de temps à s'interroger sur les fondements, ils n'en auraient plus pour faire ce qu'ils aiment, c'est-à-dire des mathématiques. De même qu'un écrivain peut ne pas s'intéresser à la grammaire (sans en ignorer tout pour autant), un mathématicien peut ne pas s'intéresser à la logique (sans en ignorer tout pour autant).

Les mathématiciens se heurtent aux objets, se cognent dedans, n'en font pas ce qu'ils veulent. La réalité mathématique les fait souf frir. Ils vivent cela comme une preuve tangible de ce qu'elle existe ! Reconnaissons que, en même temps, elle les protège. Elle leur permet d'éviter les questions épineuses sur les fondements, donc de fuir celles sur les limites des mathématiques.

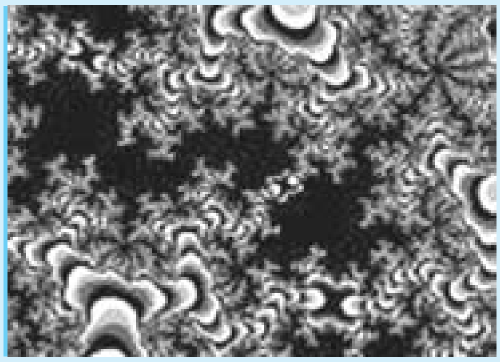
Objectif : comprendre

Définir, conjecturer, démontrer, réfuter - tout cela n'a qu'un objectif : comprendre. Percevoir les mathématiques comme une science expérimentale signifie que tous les moyens sont bons pour apprendre à s'y retrouver dans un paysage mathématique. Qu'importe si, en un premier temps, ils sont peu rigoureux, voire hasardeux. De même que les physiciens font des expériences, les mathématiciens étudient des exemples pour se repérer et mettre leurs idées à l'épreuve. Ensuite, viennent les démonstrations. Mais le but, toujours, est : comprendre.

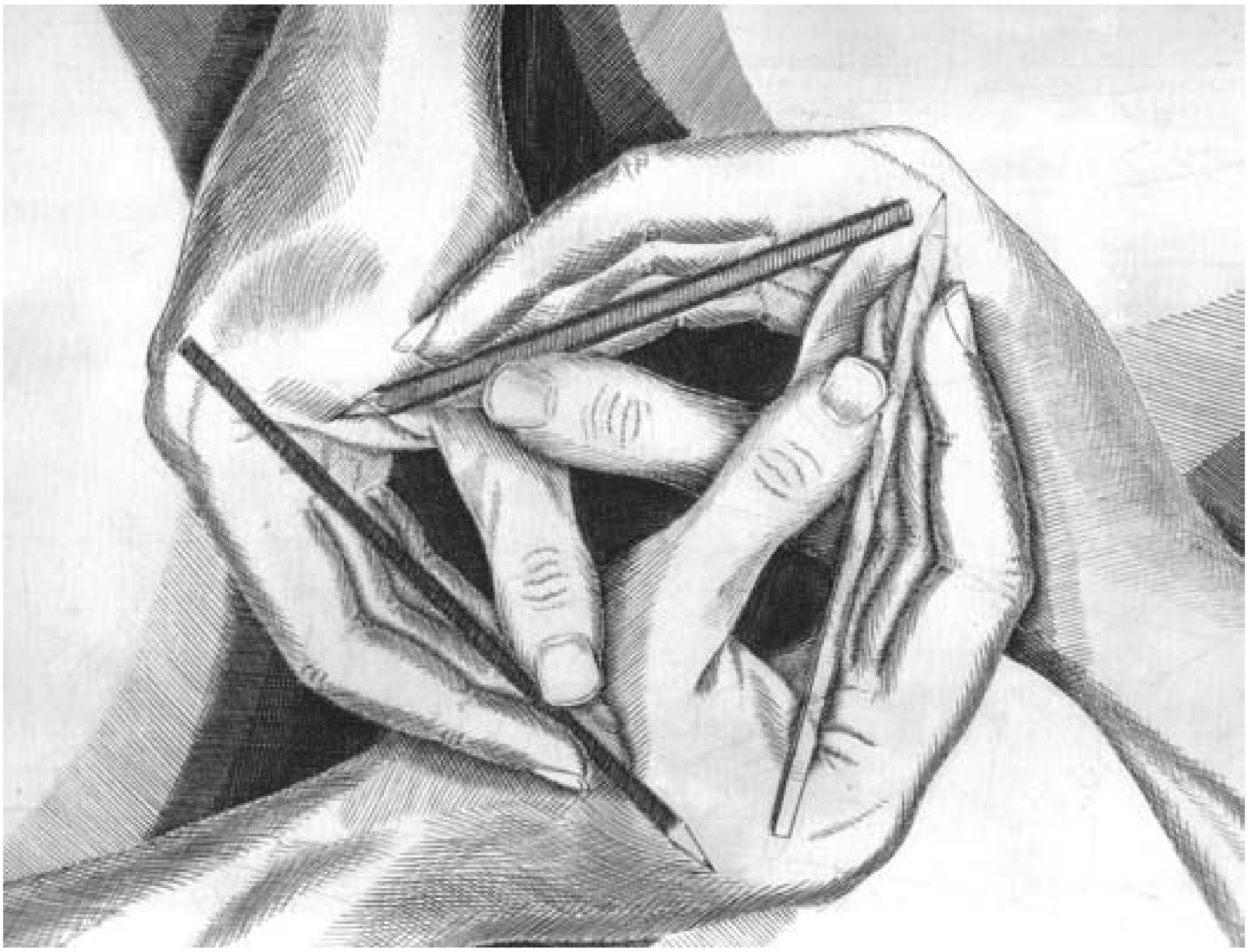
Seulement, il est rare qu'on comprenne une fois pour toutes. Pour un individu comme pour une collectivité, comprendre consiste souvent à se rendre compte qu'on n'avait pas si bien compris qu'on se le figurait. Tel ou tel point ne se comprend-il pas mieux si on le formule comme ceci et non plus comme cela ? Il n'existe pas d'idée qui ne soit prise dans un mouvement. Aucun point de vue n'est stable, toute compréhension contient sa part obligée d'illusion, et les mathématiques sont changeantes. Non que les théorèmes aient l'habitude de devenir faux du jour au lendemain, mais le regard porté sur eux évolue. Or la vérité en soi importe moins que l'image que les hommes se font d'elle. Un aspect qui aura focalisé l'attention à un moment risque d'être jugé peu pertinent par la génération suivante. Les centres d'intérêt et les moyens disponibles ont bougé. Des faiblesses dans telle conception dominante sont apparues ; en réaction, une autre a pris la place. Telle idée novatrice tient ses promesses, ou déçoit. Telle conception marginale finit par devenir centrale, ou disparaît, ou vivote. A cela s'ajoutent des phénomènes de mode : les approximations numériques et les résultats constructifs sont plus appréciés maintenant que voici vingt ou trente ans, les théorèmes abstraits (« d'existence et d'unicité ») le sont moins. Dans l'avenir, il se pourrait que l'informatique incite peu à peu les mathématiciens à cesser de comprendre les mathématiques en termes le plus généraux possibles.

Les fractales

Une fractale est une courbe qui reste semblable à elle-même quel que soit le grossissement sous lequel on la regarde.



L'enseignement évolue en écho à ces variations. La géométrie tint longtemps le haut du pavé. La théorie des ensembles, avec les structures, eut une heure de gloire, qui tourna au désastre (la réforme des « maths modernes »). Aujourd'hui, les statistiques, bien adaptées à l'utilisation des machines actuelles pour calculer, font une percée.



ACTIONS

par Didier Nordon

Reprendre, toujours

La perfection n'est pas de ce monde, et les mathématiques n'atteignent jamais l'heureux état de stabilité paradisiaque réservé à ce qui est parvenu à la perfection. Elles ont af faire à l'infini, et une notion aussi bouleversante pour l'être humain ne peut pas connaître la paix d'une définition aboutie et intangible. Ephémères comme toute chose, perpétuellement contraintes de s'adapter à des situations inattendues... Quel mathématicien « pur », dans les années 1960, aurait imaginé que l'informatique, ce nouveau-né balbutiant, aurait le front de poser à son aînée de vingt-cinq siècles des problèmes dif ficiles, et se mêlerait d'apporter sa touche au paysage d'ensemble des mathématiques ?

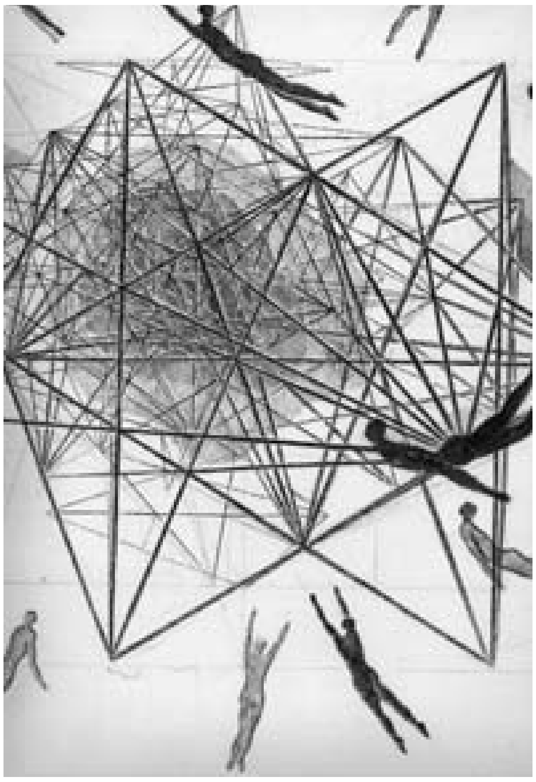
Du coup, la plupart de nos définitions ont moins de deux siècles et, parions-le, varieront encore. Les notions actuelles de fonction, de limite, datent du courant du XIX^{e} siècle ; celles d'ensemble, d'infini, de la fin de ce même XIX^{e} ; celle de nombre reste indécise. Comprendre est un acte dynamique, donc les outils inhérents à cet acte ne peuvent pas rester figés. Les étudiants sont excusables de confondre continuité et dérivabilité : les mathématiciens l'ont fait jusqu'au XIX^{e} siècle. Puis Weierstrass (1815-1897), à la suite de Bolzano (1781-1848) et de Riemann (1826-1866), imagina des fonctions continues partout mais nulle part dérivables. Ces spécimens choquèrent, mais menèrent à mieux distinguer les deux notions. Ils furent les premiers d'une série d'objets pathologiques (ce mot familier est fréquent dans la bouche des mathématiciens). Certains sont fameux, comme la courbe de Peano (1858-1932), qui recouvre un carré, ou celle de von Koch (1870-1924), qui délimite une surface finie et bornée alors que sa longueur est infinie. Ces courbes, obtenues par un découpage réitéré à l'infini à partir des côtés d'une figure simple, semblent moins pathologiques qu'autrefois. La majorité des mathématiciens n'a plus d'objection contre les constructions exigeant une infinité d'étapes. En outre, ces courbes ont aidé à faire advenir une conception désormais lar gement admise : les phénomènes naturels peuvent relever du discontinu. La courbe de von Koch apparaît aujourd'hui comme un exemple de fractale (voir l'encadré en page 15).

Une infinité d'infinis

Non contents d'accepter l'infini, les mathématiciens, depuis la fin du XIX^{e} siècle, ont construit, au prix de théories d'une belle technicité, une infinité d'infinis. Des infinis de plus en plus infinis ! Cela ne signifie pas que l'infini ait cessé d'être un problème. Pour évoluer beaucoup d'une époque à l'autre, les difficultés nées de lui semblent ne jamais devoir se résorber totalement. La mise en place d'infinis vertigineux a quelque chose d'une fuite en avant, qui occulte le fait que même le simple infini dénombrable garde sa part d'énigme. Les mathématiques contribuent là à l'éloignement préoccupant entre la science et le sens commun.

Autre objet dont le statut a changé à mesure que la compréhension des phénomènes a changé : $\sqrt{2}$. Pour les pythagoriciens, loin de faire comprendre quoi que ce soit, ce que nous notons $\sqrt{2}$ était inconcevable, venait en contre-exemple à leur théorie selon laquelle tout est nombre (entendons : nombre rationnel). Pour nous, $\sqrt{2}$ n'a rien de pathologique ; il nous aide à appréhender la réalité mathématique et est un simple exemple d'un de ces nombres auxquels nous donnons, justement, le qualificatif paisible de « réels ».

Si bien que le statut d'un contre-exemple peut varier avec le temps. Lorsqu'un chercheur en trouve un, il doit l'interpréter, sans être certain que son interprétation prévaudra. Estime-t-il que le contre-exemple est une pathologie destinée à rester isolée ? Auquel cas, il a tendance à l'estimer



peu instructif et à l'abandonner sans l'exploiter . Est-ce l'indice qu'une notion a été mal circonscrite, que sa définition est impropre, qu'un problème est mal posé ? En ce cas, analyser le contre-exemple peut être éclairant. Les contre-exemples jouent un grand rôle en période d'instabilité, quand on ne sait pas quelle définition choisir pour cerner quelque situation. Ils aident à adapter la définition à la situation. Les mathématiciens font des allers et retours entre théorèmes et définitions. Ils peuvent ajuster une définition afin de rendre exact un énoncé ; ils peuvent préférer garder la définition, mais modifier l'énoncé. La boussole pour choisir une option étant : comprendre au mieux ce qui se passe.

La licorne et les réels

Etrangement, la notion d'exemple ne permet pas de dire si les objets mathématiques existent vraiment, ou s'ils sont des vues de l'esprit. Donner un exemple d'objet ayant telles et telles propriétés peut ne pas prouver qu'existe effectivement un objet doté de ces propriétés ! En effet, il n'est pas rare que la construction de l'exemple passe par un algorithme ayant une infinité d'étapes, ce qui pose des questions embarrassantes. Que signifie le mot «exister», appliqué à un objet obtenu par une construction intellectuelle aussi peu explicite ? Définir un objet en tant que résultat d'une infinité d'opérations réitérées permet de le manipuler , mais en quoi cela montre-t-il qu'il existe vraiment ? Une telle construction est-elle admissible ? Actuellement, les mathématiciens sont assez indifférents à ce genre de questions. Leur conception de l'infini répond avant tout à leurs besoins techniques. L'ensemble des réels est infini, mais ils s'en servent tout le temps. Alors, quels que soient les problèmes que cela pose, il faut bien qu'il existe ! Dans la nature, il suffit de rencontrer une licorne pour être en droit d'affirmer l'existence de cet animal. En mathématiques, il ne suffit pas de rencontrer un objet pour être sûr qu'il existe. La rencontre peut être fictive : pour croire, il faut voir mais, pour voir , il faut croire ! A partir d'un certain degré d'abstraction, la croyance en la réalité d'un objet dépend des options de l'observateur et du type d'éclairage qui lui fait le mieux comprendre les mathématiques. De nos jours, ceux qui craignent que le contrôle sur des objets impossibles à expliciter ne soit insuffisant et qui, redoutant d'être menés à des absurdités, refusent de manier de tels objets, ces mathématiciens-là sont rares. En majorité, leur réaction est celle de praticiens. Se priver de l'infini est impensable, donc ils ne gaspillent pas d'énergie à discuter la valeur de cette notion (voir l'encadré en page 16).

D.N.

Références :

• Jean-Paul Delahaye, *L'Intelligence et le calcul,* Belin - *Pour la science*, 2002.

• *Pour la science,* numéro spécial *Les infinis,* n° 278, décembre 2000.