par Didier Nordon

L'exception qui infirme la règle

En mathématiques, les règles n'ont jamais d'exceptions. L'exception est ce qui échappe non à la règle, mais au cas général. La notion d'exception ne se confond pas avec celle de contre-exemple.

Pourquoi tant de gens croient-ils que faire des mathématiques consiste à appliquer des règles ? La faute à la « règle de trois », peut-être, qui fut enseignée à tous. Le « raisonnement » semble le suivant. Al'école, nul ne comprend la règle de trois. Or nul ne comprend ce que font les mathématiciens. Donc ce qu'ils font s'apparente à la règle de trois : une manipulation tombée du ciel, à laquelle on doit se soumettre sans y changer un iota.

Souvent, le travail d'un mathématicien est de voir si un contre-exemple anéantit telle idée, ou si l'idée reste malgré tout «presque vraie » ...

Règle, ou recette ?

En fait, les mathématiciens emploient peu le mot « règle ». Ils sont à la recherche de régularités, en ce sens qu'ils essaient de mettre un ordre dans le chaos du monde, mais ils expriment celles-ci sous forme de théorèmes, non de règles. Prononcé devant un mathématicien, le mot « contre-exemple » lui fait penser au rejet d'une idée fausse, ou moins générale qu'elle ne semblait, non à la fameuse exception qui confirme la règle. Au contraire ! Pour lui, une seule exception suffit à infirmer une règle. C'est bon pour les règles de grammaire, d'être à peu près toutes contredites par des faits rebelles. Les règles qu'utilisent les mathématiciens ne souffrent pas d'exceptions. En effet, chez eux, règle est synonyme de recette, c'est-à-dire un résultat d'utilisation très fréquente, qu'on emploie sans réfléchir pour aller vite face à une situation classique (voir l'encadré ci-après).
Non que les mathématiques ignorent le phénomène des exceptions. Mais, pour elles, une exception est ce qui échappe au cas général. Or la notion de cas général s'applique à la description d'un paysage mathématique ; la notion de règle s'applique à la possibilité d'effectuer quelque opération. Par exemple, le fait que l'équation du second degré a deux racines complexes n'est pas une règle. C'est le cas général. Le cas où elle n'a qu'une racine est une exception au cas général. Prendre cette exception pour un contre-exemple réfutant le fait que l'équation du second degré a deux racines serait mal comprendre la situation. Quant au calcul des racines, la règle qui permet de le faire est la même dans le cas général et dans le cas exceptionnel.
Souvent, le travail d'un mathématicien est de voir si un contre-exemple anéantit telle idée, ou si l'idée reste « presque vraie », le contre-exemple étant alors réduit au statut, moins grave, d'exception.

Les cas douteux

En mathématiques, les règles n'ont pas d'exception, mais elles peuvent présenter des cas douteux. Ces cas douteux peuvent être plus fréquents que les cas non douteux. Les étudiants de licence l'apprennent à leurs dépens, lorsqu'ils constatent que toutes les séries intéressantes à étudier se trouvent dans le cas douteux des règles de Cauchy ou de d'Alembert.

Règles de calcul, règles de la logique

Les mathématiciens n'étudient guère la notion de règle. C'est que les règles de calcul ne leur posent aucun problème - et que celles de la logique leur en poseraient trop !
Une règle de calcul célèbre est la règle des signes (« moins par moins fait plus »). C'est un théorème

• Une drôle de distributivité

On sait que dans l'ensemble des nombres réels, la multiplication est distributive par rapport à l'addition : quels que soient les nombres réels a, b et c, on a l'égalité :

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c).$$

Par contre, l'addition n'est évidemment pas distributive par rapport à la multiplication. Mais peut-on trouver des exemples de nombres réels a, b et c tels que l'on ait :

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c) \ ?$$

Réponse

On peut trouver des triplets $(a \,;\, b \,;\, c)$ tels que

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c).$$

En voici un exemple :

$$0{,}5 + (0{,}1 \times 0{,}4) = (0{,}5 + 0{,}1) \times (0{,}5 + 0{,}4).$$

On vérifie que $0{,}5 + 0{,}04 = 0{,}6 \times 0{,}9$.

On démontre qu'une telle égalité est vraie si et seulement si $a = 0$ ou $a + b + c = 1$. En effet,

$(a + b)\,(a + c) = a^2 + ac + ab + bc = a\,(a + b + c) + bc$,

d'où la conclusion.

Michel Criton

élémentaire, sur lequel il n'y a pas de quoi épiloguer. L'ayant établi, on l'utilise sans plus y songer . Evidemment, quand un élève a du mal à acquérir une technique, il se crispe et se figure que, s'il ne comprend pas, c'est qu'il y a beaucoup à comprendre. Alors, il soupçonne la technique de recéler une signification profonde qu'en fait elle n'a pas. La première chose à comprendre, sinon la seule, est qu'il n'y a aucun secret métaphysique à chercher derrière la règle des signes. De façon générale, les règles de calcul sont des théorèmes. En cela, elles ne soulèvent aucune difficulté spécifique.

Quant à la logique, la plupart des mathématiciens estiment n'avoir besoin que de règles élémentaires, qu'ils considèrent comme naturelles, donc universelles. Cela révèle des limites à leur imagination. Qualifier un phénomène de « naturel » signifie qu'on n'arrive tout bonnement pas à concevoir l'exemple d'une situation où il ne se produise pas. Les mathématiciens s'interrogent peu quant à l'influence éventuelle de leur langue sur les règles de la logique. Pas plus que quiconque, ils ne peuvent tout réexaminer du vaste monde. Pour réfléchir aux mathématiques, ils prennent les règles de la logique comme données. Parmi les nombreuses spécialités au sein des mathématiques, figure cependant la logique. C'est une spécialité comme les autres, ce qui a pour conséquence inéluctable que les autres spécialistes lui prêtent une attention distraite ! Ayant confiance dans la réalité qu'ils étudient, ils ne comptent pas sur la logique pour valider leurs travaux, ni ne craignent qu'elle les invalide. De fait, les articles de recherche en logique n'aspirent pas à établir des règles qui s'imposent aux mathématiciens. Le mot « règle » est à peine plus fréquent chez les logiciens que chez leurs collègues. En général, les théorèmes démontrés dans les articles de logique restent internes à la spécialité. L'influence de la logique sur les mathématiques naît plutôt d'interactions, pas toujours directes. Actuellement, c'est peut-être via l'informatique que cela se produit le plus.

D.N.