Récurrence : les nombres de Catalan

Le problème

On considère la suite de réels définie par la récurrence $C_0 = 1$, et $C_{n+1} = \dfrac{4n+2}{n+2}\, C_n$.
Calculer la valeur de C_n pour un entier n choisi.

Complément culturel

Le mathématicien Eugène Charles Catalan (1814–1894) a étudié au XIX^e siècle cette suite de nombres que l'on appelle depuis les « nombres de Catalan ».
Elle répond au problème suivant : étant données n couples de parenthèses (n « ouvrantes » et n « fermantes »), de combien de façons peut-on les écrire de telle sorte qu'à tout moment, en les lisant de gauche à droite, le nombre de parenthèses ouvrantes soit inférieur ou égal au nombre de parenthèses fermantes ?
Ainsi, trois couples de parenthèses, par exemple, peuvent être ordonnées de cinq façons :
((( ))) ; (( )( )) ; (( ))( ) ; ( ) ( ) ( ) ; ( ) (( )).

Les programmes

Python

Le programme est simple, mais la suite de Catalan comporte rapidement des nombres de grande taille. On se rend compte que la programmation, dans ce cas, trouve ses limites. La réponse est « l'infini » pour n = 1 000.

le programme

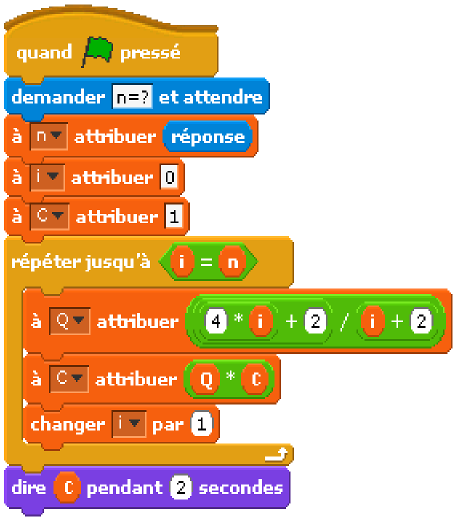
```
>>> def catalan(n):
        i=0
        C=1
        while i!=n:
            C=(4*i+2)/(i+2)*C
            i=i+1
        return C
```

le résultat

```
>>> catalan(30)
3814986502092304.0
>>> catalan(100)
8.965199470901316e+56
>>> catalan(1000)
inf
```

Scratch

Le programme demande au départ la valeur de l'indice n du terme à calculer. La variable i est un compteur de boucles, la condition de sortie de boucle est d'avoir i qui soit égal à n.



AlgoBox

Dans le programme,
le test i ! = n signifie $i \neq n$.

On décompose le calcul : on calcule $\dfrac{4n+2}{n+2}$ à part et on place le résultat dans la variable Q.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  C EST_DU_TYPE NOMBRE
  Q EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  i PREND_LA_VALEUR 0
  C PREND_LA_VALEUR 1
  TANT_QUE (i!=n) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    Q PREND_LA_VALEUR (4*i+2)/(i+2)
    C PREND_LA_VALEUR Q*C
    i PREND_LA_VALEUR i+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER C
FIN_ALGORITHME
```

Prolongements*

Les nombres de Catalan sont définis à partir de la relation de récurrence $C_{n+1} = \dfrac{4n+2}{n+2} \times C_n$. C'est une relation que l'on peut écrire aussi $C_n = \dfrac{4n+2}{n+2} \times C_{n-1}$.

Qui dit « récurrence » autorise souvent en algorithmique à penser récursivité, c'est-à-dire à un programme qui, au cours de son exécution, fait appel à lui-même. Le programme « catalan2 » ci-dessous utilise la récursivité.

le programme

```
if n==1:
        return(1)
else:
        return((4*n-2)/(n+1)*catalan2(n-1))


>>> catalan2(30)
3814986502092304.0
>>> catalan2(100)
8.965199470901316e+56
```