

# Dix années d'énigmes et de rallye mathématique

Le rallye mathématique de Bruxelles a aujourd'hui trouvé sa place parmi les différentes compétitions mathématiques. Ce qui fait sa spécificité est la demande faite aux participants de rédiger une petite narration de recherche de solution.



Le premier rallye de Bruxelles est né sous l'impulsion d'André Antibé, avec l'aide de l'équipe de l'IREM de Toulouse, qui nous a fourni questions, modalités d'organisation et surtout l'enthousiasme nécessaire au lancement de ce genre d'activité. Les premières moutures de notre rallye n'ont donc pas brillé par leur originalité au niveau des questions. Honte à nous, nous avons pillé sans vergogne les rallyes français et même le Kangourou. Cela ne pouvait nous satisfaire. Le lecteur pourra constater que nous avons évolué.

Contrairement à ce qui se faisait à l'IREM de Toulouse, nous avons immédiatement opté pour la demande de petites narrations de recherche. Nous avons maintenu ce cap qui est particulièrement intéressant pour la compréhension du cheminement intellectuel de nos participants. Ce sont généralement ces narrations de recherche qui permettent de distinguer les groupes les plus intéressants. Et qui donnent naissance à nos petites études didactiques.

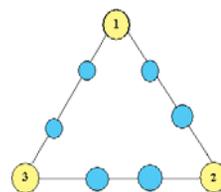
Chaque problème proposé demande donc deux réponses : celle à la question posée proprement dite. Et ensuite, en trois lignes, le début (et seulement le début) du raisonnement, son point de départ.

Sans plus attendre, voici maintenant les questions.

## Mars – mai 2003 : la première expérience

### 1. 1 Le triangle magique

Pour compléter le triangle ci-contre, il faut utiliser tous les chiffres de 4 à 9 de façon que la somme de ces chiffres sur chaque côté du triangle soit la même. Les chiffres 1, 2 et 3 sont déjà utilisés.



**Expliquer en trois lignes comment vous avez placé les deux premiers chiffres.**

### 1. 2. Le carré de carrés

Votre enveloppe contient un grand carré de 25 cm de côté. Il faut le découper en exactement six carrés d'une seule pièce sans déchet. Avec les six carrés, on doit pouvoir retrouver le carré de départ. Glissez les six carrés dans l'enveloppe sans en perdre.

**Expliquer en trois lignes comment vous avez commencé à raisonner.**

### 1. 3. Décodage naturel

Vous êtes un spécialiste du décodage. Les messages transmis consistent en une succession de mots transformables en nombres naturels, qui constituent le vrai message. Chaque lettre a pour valeur un nombre naturel. La valeur d'un mot est



enfants et petits-enfants ont tous eu exactement le même nombre d'enfants... Incroyable, non ?

**Alors, quel est l'âge du capitaine ? Et quel fut en gros votre raisonnement ?**

### 2. 4. Sommes-nous bien lotis ?

Un promoteur immobilier décide de découper un terrain rectangulaire en y faisant passer deux chemins perpendiculaires aux côtés du rectangle (et donc entre eux). Il obtient ainsi quatre parcelles dont les superficies sont respectivement :

- $260 \text{ m}^2$ ,
- $500 \text{ m}^2$ ,
- $715 \text{ m}^2$ ,
- $1375 \text{ m}^2$ .

Les dimensions des rectangles sont des nombres entiers.

**On vous demande de faire un plan du terrain correspondant à ces indications, en indiquant les dimensions de chaque parcelle.**

### 2. 5. Une question vache

Un fermier farfelu a l'habitude de diffuser de la musique à ses bovidés, espérant ainsi faire croître sa production laitière. Or donc, il apparut bien vite à ce fermier qu'une de ses vaches, la belle Zinette, ne donnait du lait qu'à l'audition de Mozart exclusivement, les autres vaches semblant quant à elles insensibles au changement de style musical.

Chaque vache donne (approximativement mais on suppose que c'est très exactement) dix litres de lait par jour. Le mois de janvier de cette année, notre fermier a récolté cinq mille trois cent cinquante litres de lait.

**Combien a-t-il de vaches ? Combien de jours nos vaches ont-elles eu la chance d'entendre Mozart ? En gros, quel fut votre raisonnement ?**

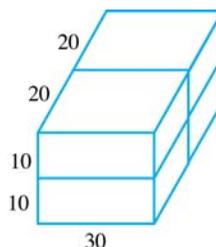
## Mars – mai 2005 : troisième rallye

À partir de la mouture 2005, le rallye devient indépendant mais n'est toujours pas original.

### 3. 1. Bon anniversaire

Mattias a reçu pour son anniversaire un gros paquet contenant quatre boîtes de jeu. Ce paquet a la forme d'un grand parallélépipède rectangle et les boîtes sont toutes les quatre des parallélépipèdes rectangles de mêmes dimensions, à savoir :  $10 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ .

Voici la disposition des boîtes dans le paquet.

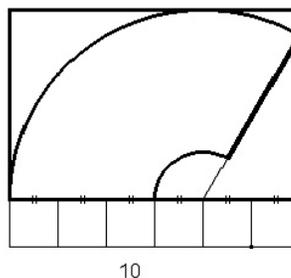


**Combien de dispositions différentes de ces quatre boîtes formant un paquet ayant la forme d'un parallélépipède rectangle peut-il bien exister ?**

**Comment avez-vous raisonné ?**

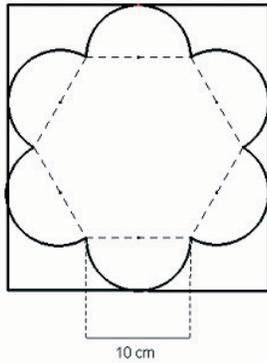
### 3. 2. Le pare-brise

**Quelle est la superficie balayée par le balai d'essuie-glace sur ce pare-brise plan de 60 cm de longueur ? Comment avez-vous raisonné ?**



### 3.3. Un beau plat

Un ébéniste veut découper un dessous de plat dans une planche rectangulaire, comme indiqué ci-après. Le pourtour du dessous de plat est constitué de six demi-cercles dont les diamètres sont les côtés d'un hexagone régulier. Les côtés de cet hexagone ont une longueur de 10 cm.



Quelles sont les dimensions (longueur et largeur) de la planche ? Comment avez-vous raisonné ?

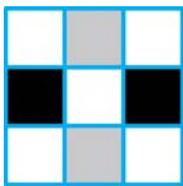
### 3.4. Robin des bois

Après avoir dépouillé dans la forêt de Sherwood un convoi du shérif de Nottingham, Robin des bois dispose de 10412 pièces d'or de dix écus, qu'il partage en donnant la même somme à chacune des familles pauvres d'un village. Il lui reste alors 17 pièces. Un mois plus tard, il dispose de 12035 pièces, qu'il partage comme précédemment ; dans ce cas, il lui reste 23 pièces.

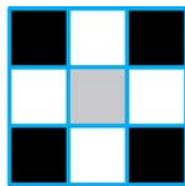
Il y a plus de cent familles dans ce village, mais combien exactement ?

Comment avez-vous raisonné ?

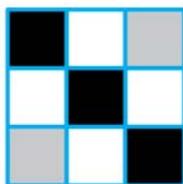
### 3.5. Des grilles



grille 1



grille 2



grille 3

Des grilles sont composées de neuf cases blanches, grises ou noires. Chaque case noire rapporte un certain nombre de points. Chaque case grise enlève un certain nombre de points. Les cases blanches sont sans effet.

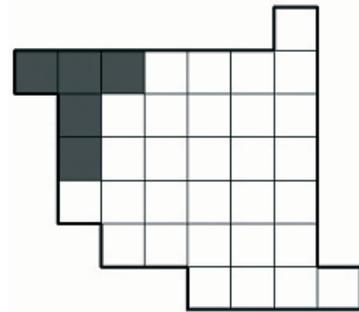
La première grille vaut 14 points, la deuxième grille vaut 43 points.

Quelle est la valeur de la troisième grille ? Comment avez-vous raisonné ?

### 3.6. Les insomnies du père Toutenté

Le père Toutenté a sept enfants et un terrain ayant la forme représentée ci-dessous.

Comment peut-il partager son terrain en sept parcelles identiques à celle teintée de gris ?

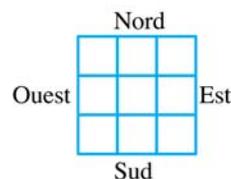


### 2006 : quatrième rallye

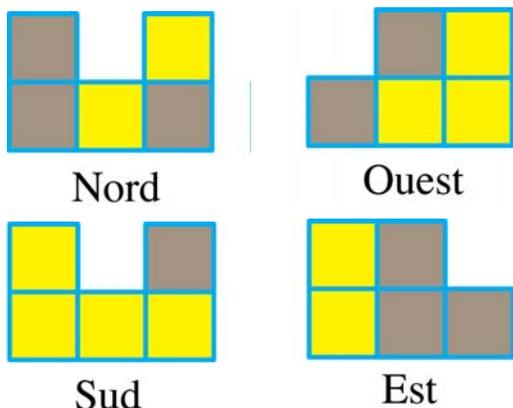
Nous introduisons à l'occasion du rallye de 2006 les thèmes culturels. Voici «Europalia Russie».

#### 4.1. Les sept tours de Moscou

Lorsque Staline décida d'orner les environs du Kremlin d'édifices devant marquer son passage au pouvoir, un concours fut organisé afin de sélectionner un projet se distinguant des gratte-ciel occidentaux et ne défigurant pas trop le centre historique de Moscou. En 1935, l'architecte Ernest Guide avait proposé le projet suivant, qui ne fut pas retenu. Il proposait en effet d'empiler de véritables cubes de béton clair ou foncé sur ce terrain 3 × 3 :

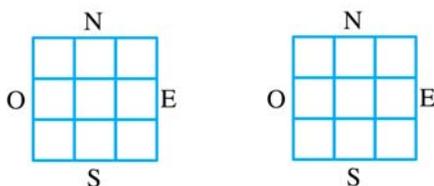


Notre architecte a conçu une couche inférieure pleine (neuf blocs) et a présenté les quatre vues latérales de son projet grandiose.



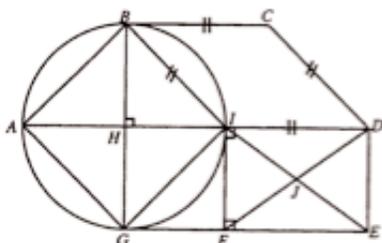
On vous demande de donner une représentation de la première et de la deuxième couche de blocs, en les coloriant (il peut y avoir plusieurs solutions):

Couche inférieure      Couche supérieure



#### 4.2. Les jardins de Saint-Petersbourg

En 1703, le tsar Pierre le Grand (1672–1725) fonda la ville qui deviendra Saint-Petersbourg, créée sur de vastes marais. Un projet d'époque dû à un paysagiste belge de la région de Wavre vient d'être retrouvé. Il proposait la réalisation de jardins selon le plan suivant (il faut excuser la mauvaise qualité de ce document vieux de trois siècles):



#### Europalia

Lancé à Bruxelles en 1969, «Europalia» est un festival international qui présente tous les deux ans l'essentiel du patrimoine culturel d'un pays. D'octobre à février, à Bruxelles et dans de nombreuses villes belges et limitrophes, le festival met en scène toutes les pratiques artistiques: musique, arts plastiques, cinéma, théâtre, danse, littérature, architecture, design, mode, gastronomie... L'édition 2006 fut consacrée à la Russie.

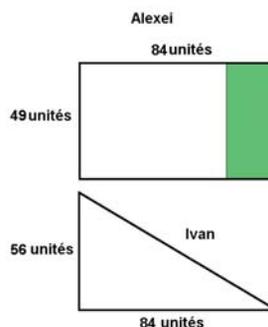


Sans mesurer et sans calculs savants, classez le cercle, les figures «BCDI», «IDEF» et «ABIG» par ordre décroissant de superficie. Quel a été votre raisonnement?

#### 4.3. Le partage des frères Karamazov

Depuis leur plus jeune âge, les frères Alexei et Ivan Karamazov ont toujours tenté de représenter l'idéal type de la société russe de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle.

Constatant un jour que leurs parts de gâteau étaient inégales, le jeune Alexei proposa à son frère Ivan de lui offrir, comme indiqué sur la figure, un morceau rectangulaire de sa part.



Quelle est, en unités de mesure, la largeur du gâteau qu'Alexei doit couper pour Ivan afin d'effectuer un partage équitable ?

Quel est votre raisonnement ?

#### 4.4. Le coffre-fort du baron Paul



Le Baron Von Derwies fut un personnage de roman ! Simple professeur de piano chez un banquier russe qui l'initie à la spéculation, il se distingue ensuite comme ingénieur, propriétaire des lignes de chemins de fer russes (celles du futur Transsibérien), banquier florissant et ami du tsar Alexandre II. Près de Nice, il fit construire le somptueux Château Valrose (voir ci-dessus).

Pour choisir le code de son coffre-fort, notre baron renonce à l'alphabet cyrillique et procède comme suit afin d'être sûr de pouvoir le reconstituer en cas d'oubli :

- les lettres du code doivent se suivre en ordre alphabétique, comme DGKZ, AEUVX ou BNZ ;
- il ny a pas de « A » dans la combinaison ;
- si l'on remplace chaque lettre par sa place dans l'alphabet (B = 2, C = 3, D = 4...) et que l'on multiplie les nombres obtenus, on arrive à 2002.

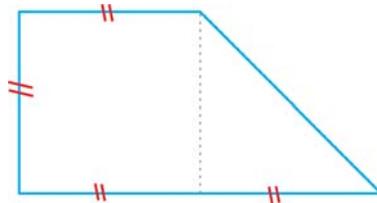
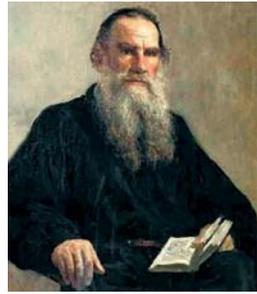
Quels sont les codes possibles ? Quel a été votre raisonnement ?

#### 4.5. Le partage des terres selon Léon Tolstoï

Le célèbre écrivain (1828–1910) était partisan de l'éducation pour tous : il fonda l'école de Iasnaïa Poliana dans sa propriété de famille, près de Toula. L'idée de Tolstoï de créer chez lui une école gratuite fut accueillie par les paysans avec incrédulité et méfiance. L'écrivain était également

partisan du partage des terres entre les paysans, même s'il fut réticent à leur accorder des libertés politiques, qu'il qualifiait de « *pervertissantes* ».

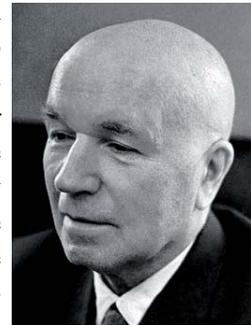
Il envisagea un jour de partager entre quatre serfs un champ en forme de trapèze rectangle en quatre champs également en forme de trapèzes rectangles, tous de mêmes dimensions. Voici une représentation du champ.



Faire sur ce dessin la représentation la plus précise possible de cette découpe. Construire un trapèze rectangle de dimensions 20 cm sur 10 cm. Effectuer le découpage et joindre les quatre morceaux au questionnaire.

#### 4.6. Calculer sans calculette

Le Russe Ivan Matveevich Vinogradov (1891–1983) fut un célèbre mathématicien. Il fut le premier directeur de l'Institut de mathématiques Steklov dès 1934. Ayant constitué une méthode classique de sommation trigonométrique, il obtint des résultats



fondamentaux et résout de nombreux problèmes de la théorie analytique des nombres. Il nous propose ici un petit exercice amusant... à réaliser sans calculette.

Sachant que  $12\,345\,679 \times 9 = 111\,111\,111$ , donner très exactement et à l'unité près le résultat de l'opération  $12\,345\,679 \times 186\,354$ . Comment avez-vous procédé ?

### 2007 : et le cinquième rallye

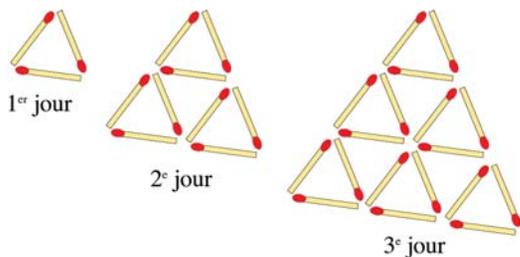
Le thème de cette édition du rallye était «Discover the Fibonacci Code». Alors que la toute grande foule s'est ruée dans les salles obscures pour y découvrir la version de Ron Howard du *Da Vinci Code*, adaptée du roman éponyme de l'Américain Dan Brown, l'idée nous est venue de surfer sur cette vague pour imposer le Fibonacci code. Cette suggestion nous a d'autant séduits que ce code existe réellement, comme nous allons le découvrir. Le rallye suivait de peu la sortie en DVD du film...

#### 5.1. Les fausses suites de Fibonacci

De nos jours, Fibonacci est surtout connu pour une fameuse suite de nombres qui porte son nom. De son vivant, ce sont surtout les applications de l'arithmétique au calcul commercial qui l'ont rendu célèbre.

Voici une autre suite de nombres à découvrir.

Le premier jour, avec trois allumettes, on construit un triangle. Facile ! Le jour suivant, on construit un triangle plus grand, de côté «deux allumettes». Puis, le troisième jour, un triangle encore plus grand comme illustré sur le dessin.



**Combien d'allumettes y aura-t-il sur la table le quatrième jour ?**

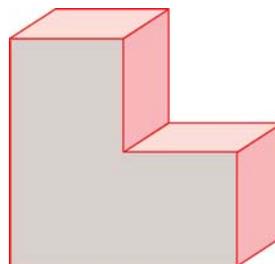
**Combien faut-il en ajouter le quinzième jour pour compléter le dessin existant ?**

#### 5.2. La tour non penchée de Pise

Né à Pise vers 1170, Fibonacci passa sa jeunesse en Algérie. Vers 1200, il revint dans sa ville natale où il vécut avec désolation la construction de la

célèbre tour penchée. Il réalisa alors un projet alternatif beaucoup plus stable, mais moins esthétique, composé de trois vrais cubes assemblés (ne vous fiez pas au dessin !).

**On demande de réaliser un développement (patron) de ce curieux projet. Si vous trouvez d'autres développements non superposables, joignez-les, vous marquez plus de points.**



#### 5.3. Les marins malhonnêtes

Guilermo Bonacci, père de Leonardo (ce qui lui valut son surnom : Fibonacci vient de la contraction de *Filius Bonacci*, fils de Bonacci) gérait les marchés de la République de Pise en Algérie, en



Tunisie et au Maroc. Il fut confronté à un vol important : la disparition de toute une cargaison de tissus précieux. L'importance de la disparition conduisit à penser que deux des six membres de l'équipage étaient coupables.

Alberto dit que Caldo est innocent.

Bonno dit que Dido est innocent.

Caldo dit que Emilio est innocent.

Dido dit que Fabrizio est innocent.

Emilio dit qu'Alberto est innocent.

Comme chacun le sait, les marins honnêtes disent toujours la vérité.

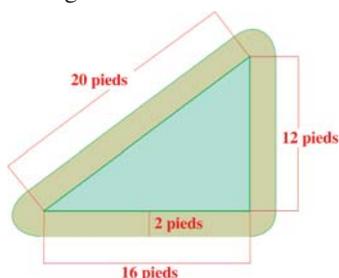
**Qui sont les deux voleurs ? Indiquez toutes les étapes qui ont conduit à la découverte des coupables.**

#### 5.4. Le parterre de fleurs de Frédéric II de Hohenstaufen

Frédéric II de Hohenstaufen (1194–1250) régna sur le Saint Empire romain germanique de 1220 à 1250. C'est lui qui encouragea Fibonacci à écrire un traité de géométrie, *Practica geometrica*, qui complétait les *Éléments* d'Euclide et introduisait la trigonométrie.



Étudions comment passer d'un parterre de fleurs triangulaire à un autre, plus large de deux pieds, arrondi aux angles :



Représenter le parterre à l'échelle (sachant que 2 pieds = 1 cm).

Calculer la surface du parterre agrandi, en pieds carrés, avec deux décimales.

#### 5.5. La numération indo-arabe

Leonardo Fibonacci avait pour nom d'usage Leonardo Pisano (Léonard de Pise), mais se surnommait lui-même Leonardo Bigollo (voyageur). Son ouvrage majeur demeure le *Liber Abaci*, qui date de 1202 et qui fut le premier livre rédigé en latin livrant toutes les découvertes des Indiens en arithmétique, introduisant le zéro, le calcul décimal et permettant enfin aux Occidentaux de calculer. Grâce à lui, il vous est facile de résoudre le petit problème économique suivant, introduisant quelques unités monétaires imaginaires :

Le soltek vaut 10 % du taruk.

Le taruk vaut 20 % de l'urak.

L'urak vaut 30 % du vorek.

Le wrack vaut 40 % du vorek.

Quelle part du wrack le soltek représente-t-il ?

#### 5.6. Discover the real Fibonacci code

Cette question a été posée aux enseignants, et bien peu ont osé répondre...

Le thème du rallye de cette année est la découverte du «code Fibonacci». Ce dernier existe vraiment et permet la digitalisation des nombres naturels d'une manière différente de l'écriture binaire «classique». Voici, afin de vous porter chance, la digitalisation des treize premiers naturels au moyen de ce code :

1	1
2	10
3	100
4	101
5	1000
6	1001
7	1010
8	10000
9	10001
10	10010
11	10100
12	10101
13	100000

Pouvez-vous en percevoir le secret ? Et écrire l'entier 45 au moyen de ce code ?

La suite de Fibonacci possède de nombreuses propriétés. Pouvez-vous proposer quelques propriétés pour notre «code Fibonacci» ?

