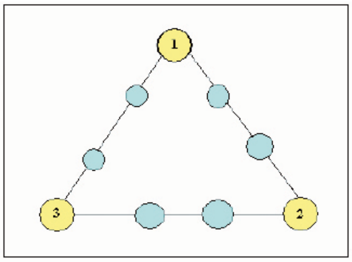
Les solutions du rallye de Bruxelles

Voici les réponses attendues à nos questions, ou plutôt des éléments de réflexion quant aux solutions proposées.

1. 1. Le triangle magique



Pour compléter le triangle proposé, il faut utiliser tous les chiffres de 4 à 9 de façon que la somme de ces chiffres sur chaque côté du triangle soit la même. Les chiffres 1, 2 et 3 sont déjà utilisés.
On vérifie que la somme des six nombres à placer est égale à 39, somme à laquelle il convient d'ajouter deux fois chaque sommet. Les sommes cherchées sont donc égales à 51 / 3=17. Il convient donc sur la branche de gauche de porter deux nombres naturels dont la somme vaut 13, ce qui peut se faire de trois façons : 9 et 4, 8 et 5, 7 et 6. Nous ne traitons que le premier cas, mais les autres sont similaires.
Il convient d'utiliser les nombres 5, 6, 7 et 8 pour obtenir deux sommes égales l'une à 12, l'autre à 14. Avec 5, il est impossible d'arriver à 14, ce nombre apparaît donc dans la branche « 1 – 2 », où il doit être associé à 7. La somme des nombres restant (6 et 8) est bien égale à 14.
Ce type de problème est repris régulièrement comme récréation mathématique, le jeu allemand Zalogo proposant même des fiches défis progressives sur le sujet.

1. 2. Le carré de carrés

Votre enveloppe contient un grand carré de 25 cm de côté à découper en six carrés d'une seule pièce sans déchet. Avec les six carrés, on doit pouvoir retrouver le carré de départ.
La division de carrés en k carrés plus petits (non nécessairement identiques) peut se faire par division de chaque côté en n (entier naturel) segments égaux, créant ainsi n^2 carrés identiques. On peut ensuite regrouper des ensembles de 4, 9, 16… carrés ou rediviser individuellement des carrés en carrés encore plus petits. On divise aisément le carré en 4, en 9, en 16… Chaque division en 4 ajoute trois carrés. Chaque division en 9, huit, et ainsi de suite. Chaque regroupement de quatre carrés en enlève trois… Pour arriver à six carrés, on doit évidemment recourir à un regroupement. De 9 carrés, on passe à 6 en regroupant quatre petits carrés en un seul.
La bonne question est : existe-t-il une théorie générale pour ce type de problèmes ?

1. 3. Décodage naturel

Le message envoyé, « anse ananas baba nasse sa banane », a pour transcription numérique :
« 25 31 10 36 13 26 ».
On constate que les mots « anse » et « nasse » diffèrent par une seule lettre : on en tire immédiatement la valeur de « s ». « sa » livre « a », ananas « n », la suite coulant de source.
On trouve finalement a = 2, b = 3, e = 5, n = 7, et s = 11.

1. 4. Solde ou pas solde ?

Les augmentations et diminutions de prix sont des processus multiplicatifs. Augmenter de 10 % signifie multiplier par 1,1. Diminuer de 10 % signifie multiplier par 0,9. Les augmentations et diminutions successives se traduisent donc par P (1,1) × (0,9) = 0,99 P.

Par conséquent, le prix a diminué de 1 %. On peut y voir une application de produits remarquables. Soit une diminution d'une fract

ion q du prix, suivie d'une augmentation de la même fraction. Le nouveau prix est donc :

$P\ (1 - q) \times (1 + q) = P(1 - q^2)$.

1. 5. Décryptage archéologique

La table de 3 ne comprend qu'un seul nombre se terminant par 7, résultat de la multiplication par 9. On en tire 3 × 9 = 27, reportons 2. Le problème se renouvelle donc : étant donné le report, il convient de retrouver à nouveau un nombre se terminant par 7. Le même raisonnement se poursuit pour déterminer le chiffre des milliers du premier facteur (report de 2, donc résultat 21, donc 7). La suite est identique. De proche en proche, on retrouve toutes les traces de la multiplication écrite de 7 899 par 2 003.

1.6. Pas besoin de s'énerver

Un des participants à notre rallye logico-ludique s'énerve. Il déchire la feuille de questions en 8. Puis il prend un des morceaux et le déchire en 8. Puis il reprend un des petits morceaux et le redéchire en 8. Après combien d'opérations de ce genre a-t-il 2 003 morceaux ? (On admire le fait qu'il puisse déchirer de tout petits morceaux.)

Le problème ressemble au problème des carrés. On part d'une seule feuille et chaque opération ajoute sept morceaux.

Il faut donc résoudre $7\,x + 1 = 2003$.

Attention à ne pas oublier la première opération, qui permet de passer de 1 à 8 morceaux !

2.1. Refusons le manque de pot

Le premier cube a quatre faces totalement visibles, ce qui représente $4 \times 3^2 = 36\,\text{m}^2$. L'une des faces est posée sur le sol, la dernière est partiellement recouverte et montre donc $9 - 4 = 5\ (\text{m}^2)$. Le deuxième cube a pareillement quatre faces totalement visibles et présente donc 4×2^2, soit $16\,\text{m}^2$. La face partielle vaut $4 - 1 = 3\ \text{m}^2$.

Le dernier cube expose cinq faces de $1\,\text{m}^2$. Au total, on a donc $(36 + 5 + 16 + 3 + 5)\ \text{m}^2 = 65\ \text{m}^2$. Il convient donc d'acheter treize pots… pour peu que les indications données par le marchand de peinture soient correctes. Nous avons tous vécu l'expérience consistant à acheter trop ou trop peu de peinture, en ayant néanmoins respecté les prescriptions du fabricant…

2.2. La bonne coupe

Les solutions sont en nombre infini. Il suffit par exemple de commencer par diviser la feuille en six bandes identiques, puis d'effectuer des dessins identiques trois par trois sur deux bandes successives en « tête-bêche » pour obtenir des solutions multiples et originales.

2.3. Quel est l'âge du capitaine ?

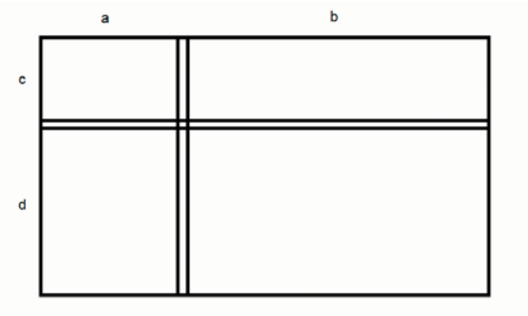
Supposons que notre capitaine ait eu n enfants (c'est beaucoup diront certains). Ceci met le nombre total de membres de la famille maritime sous la forme de la fonction à valeurs naturelles $f(n) = n + n^2 + n^3$. Voyons quelles sont les valeurs « raisonnables » de cette fonction. On calcule successivement $f(1) = 3$, ce qui paraît ridicule. Tout comme $f(2) = 14$ et $f(3) = 39$. La dernière éventualité nous laisserait pantois quant à la jeunesse du capitaine. Enfin, on calcule $f(4) = 84$, qui « tient la route » comme notre patron pêcheur tient l'alcool. N'envisageons évidemment $f(5) = 155$ que pour la forme et nous convaincre d'avoir trouvé LA solution.

2.4. Sommes-nous bien lotis ?

Graphiquement, on obtient le schéma de la page suivante.

Soient quatre surfaces de dimensions $a \times c$, $a \times d$, $b \times c$ et $b \times d$. Il convient de décomposer nos surfaces en facteurs premiers et d'observer les identités de facteurs. On a donc :

- ✍ $260 = 2^2 \times 5 \times 13$,
- ✍ $500 = 2^2 \times 5^3$,



✍ $715 = 5 \times 11 \times 13$,

✍ $1\,375 = 5^3 \times 11$.

Toutes les valeurs obtenues sont des multiples de 5. Les quatre autres facteurs sont premiers entre eux : 4, 13, 11 et 25.

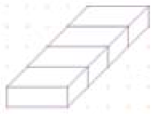
En posant $a = 5 \times 4 = 20$, on tire $c = 13$ et $d = 25$. Ceci impose $b = 5 \times 11 = 55$, qui livre bien les surfaces attendues.

2.5. Une question vache ou les caprices de la Belle Zinette

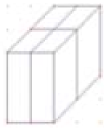
Janvier compte exactement trente et un jours (on ne pourrait pas poser la question en février). Ce qui représente donc une production moyenne de $5\,350 / 31 = 172{,}58$ litres de lait par jour. Dix-sept vaches vont donc produire 5 270 litres de lait par mois. Dix-huit en auraient produit 5 580, ce qui est trop. La Belle Zinette n'a donc produit que 80 litres correspondant aux huit jours pendant lesquels elle a eu la chance d'entendre le compositeur.

3. 1. Bon anniversaire

Les solutions sont plus nombreuses que prévu. Quelles que soient les dimensions a, b, c (avec $a < b < c$) des quatre boîtes, il existe toujours au moins les six dispositions de base.

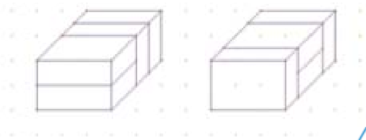


On peut les disposer « en longueur » de trois manières :
$4a \times b \times c$, $4b \times a \times c$, $4c \times a \times b$.

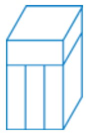


Ou « en doublons », toujours de trois façons :
$a \times 2b \times 2c$, $b \times 2a \times 2c$, $c \times 2a \times 2b$.

Remarquons que quelques cas particuliers sont intéressants. Le cas $b = 2a$ fournit deux solutions supplémentaires :

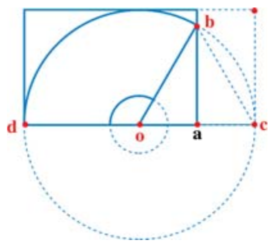


Le cas $c = 3a$ donne également :



Ce qui nous fournit neuf solutions pour tous les emballages possibles de dimensions (en cm) :
$40 \times 20 \times 30$ ou $80 \times 10 \times 30$ ou $120 \times 10 \times 20$ ou $10 \times 40 \times 60$ ou $20 \times 20 \times 60$ ou $30 \times 20 \times 40$ ou $30 \times 20 \times 40$ ou $30 \times 20 \times 40$ ou encore, *last but not least*, $30 \times 40 \times 20$.

3.2. Le pare-brise



Pour répondre à la question, il convient d'abord de déterminer l'angle de balayage. Le balai de l'essuie-glace décrit un arc de cercle de centre o.

Si nous complétons le dessin, ab est hauteur du triangle obc.

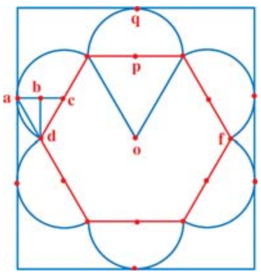
$|oc| = |od| = 40$ et $|oa| = 20$;
on en déduit que a est le milieu de [oc].

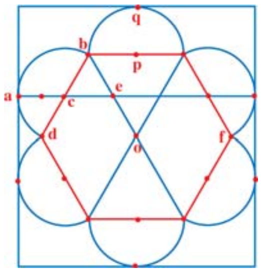
La hauteur ab est donc médiatrice du triangle obc ; ils'ensuit que $|bo| = |bc|$.

Or $|ob| = |oc|$, donc le triangle obc est équilatéral

et bôc = 60°. On en tire bôd = 120°.
La surface balayée est donc le tiers de la différence de l’aire du grand cercle et de l’aire du petit. L’aire, à savoir $1/3\ (\pi \times 40^2 - \pi \times 10^2) = 500\ \pi$ (en cm^2), vient alors naturellement.

3.3. Le beau plat





Commençons par le calcul de la « largeur » du plat. Le côté « vertical » est tangent au cercle en a. Le rayon ac est donc perpendiculaire à ce côté et, par conséquent, parallèle à do. Le triangle adc est isocèle car |ac| = |dc|. L’angle vaut 60° car ac est parallèle à do. Donc le triangle abc est équilatéral.
La parallèle bd au côté vertical coupe perpendiculairement ac en son milieu, ce qui donne :
|ab| = 1/2 |ac| = 1/2 et |dc| = 5/2.
La demi-largeur du plat est donc :
|ab| + |do| = 5/2 + 10.
La largeur du plat vaut très exactement 25 (cm).

Si les élèves connaissent le théorème des milieux ou le théorème de Thalès dans le triangle, on peut aussi raisonner comme suit : ac est parallèle à od car perpendiculaire au côté vertical (*cf.* plus haut). Le rayon ac coupe donc [bd] en son milieu et |ac| = 5. Par Thalès, puisque ce est parallèle à od et c milieu de [bd], on a e milieu de [bo] et |ce| =1/2 et |od| = 5. Idem dans les trois triangles équilatéraux et le dernier rayon en g.
On en déduit : largeur = 2 |ac| + 3 |ce| = 25.

Calcul de la longueur du plat :
Pour calculer la longueur du plat, il faut utiliser le théorème de Pythagore, qui n’a peut-être pas encore été vu dans toutes les classes. On a alors :
Longueur = 2 |op| + 2|pq|.

$$|op| = \sqrt{|ob|^2 - |bp|^2} = \sqrt{100-25} = \sqrt{75} \cong 8{,}66\ (\text{cm})$$

Ce qui donne une longueur totale environ égale à 10 + 17,32 = 27,32 (cm).

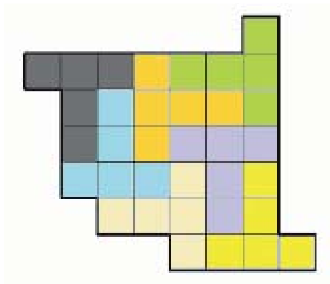
3.4. Robin des Bois

Lors du premier partage, il reste 17 pièces d’or. Donc on en a distribué 10412 – 17 = 10395 à *n* familles. Lors du deuxième partage, il en reste 23. On en tire que 12035 – 23 = 12012 pièces d’or ont été distribuées au même nombre de familles. Le nombre de familles est donc un diviseur commun de 10395 et 12012. Les diviseurs communs à ces deux nombres ($10395 = 3^3 \times 5 \times 7 \times 11$ et $12012 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 13$) sont tous les diviseurs de 3 × 7 × 11. Il y en a huit : 1, 3, 7, 11, 21, 33, 77, 231. Puisque le nombre de familles est supérieur à 100, la bonne réponse est 231.

3.5. Des grilles

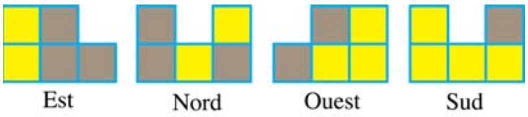
La résolution par système est immédiate mais pas nécessairement connue en 2$^{\text{nde}}$. Certains élèves ont raisonné comme suit :
n et g représentent respectivement les valeurs des cases noire et grise. À partir de la première grille, on peut dire : $2n - 2g = 14$, d’où $n = g + 7$.
La valeur de la deuxième grille est de $4n - g$, ou encore $3g + 28$, étant donne le calcul précédent.
Il ne reste plus qu’à calculer :
$3g + 28 = 43$, d’où $3g = 15$, soit $g = 5$ et $n = 12$.
La valeur de la troisième grille tombe immédiatement : 3 × 12 – 2 × 5 = 26.

3.6. Les insomnies du père Toutenté

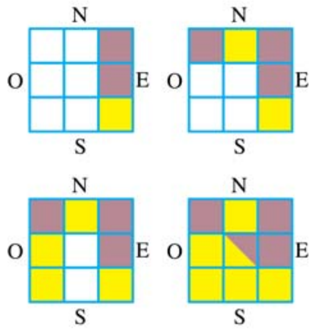


4.1. Les sept tours de Moscou

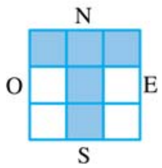
Pour la couche inférieure, pas de problème. La couche étant pleine, il suffisait de reporter les bases des trois vues latérales. Nous procédons par rotation dans le sens trigonométrique à partir de l'est.



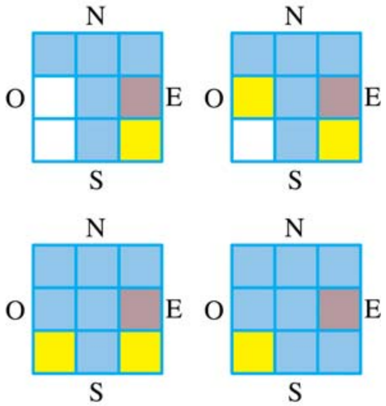
Ce qui nous donne successivement :



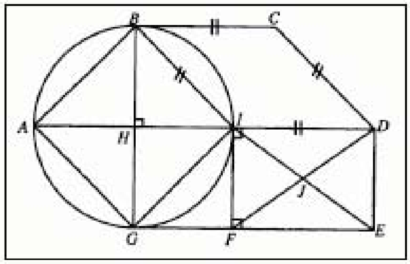
On peut procéder de la même façon pour la seconde couche, même s'il faut parfois en chemin procéder à quelques adaptations en tenant compte des « vides ». Pour plus de clarté, colorons en bleu clair (ciel) ces fameux vides obligatoires avant de procéder.



La suite de figures devient, en combinant les différentes indications et en adaptant progressivement la figure :

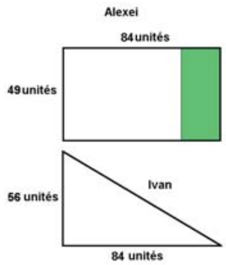


4.2. Les jardins de Saint-Pétersbourg



Le rectangle IDEF et le losange BCDI ont même surface (puisque base commune et même hauteur). Le carré ABIG est plus grand, car de côté égal à la longueur du rectangle. Enfin, le cercle contient le carré. On a donc :
« cercle > carré > losange = rectangle. »
Une erreur courante fut la suivante : carré et losange ayant longueurs de côtés identiques, leurs surfaces ont été déclarées égales. Les élèves « justifient » l'affirmation erronée en proclamant « l'isomorphisme » des deux figures. L'usage de termes savants masque parfois bien des lacunes.
On remarque que tout peut se calculer en fonction du rayon r du cercle. La surface du cercle vaut πr^2, celle du carré (de côté $\sqrt{2}r$ grâce au théorème de Pythagore) vaut $2r^2$ (clairement inférieur). Quant à la surface du losange et du carré, elle vaut $\sqrt{2}r^2$.

4.3. Le partage des frères Karamazov

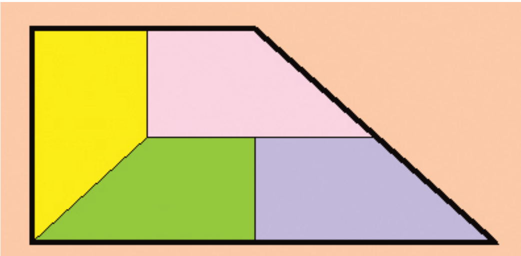


Soit x la largeur du rectangle ôté à Alexei. Il lui reste donc :
$(84 - x)\,49 = 4116 - 49\,x$ unités de surface. Son frère Ivan en a :
$84 \times 56/2 + 49\,x = 2\,352 + 49\,x$. L'équilibre parfait donne :
$98\,x = 4\,116 - 2\,352 = 1\,764$, ce qui fournit :
$x = 18$.
L'obtention d'une valeur naturelle (ce qui ne l'est pas du tout dans un « vrai » problème) rassure l'élève !

4.4. Le coffre-fort du baron Paul

Ce qui peut surprendre ici, c'est la non-unicité des réponses. On décompose assez facilement :
$2\,002 = 2 \times 7 \times 11 \times 13$.
Le premier code possible est donc : BGKM.
Mais on peut effectuer partiellement les opérations pourvu que les produits intermédiaires soient inférieurs à 26. On a donc aussi :
$2\,002 = 11 \times 13 \times 14$, donnant KMN,
$2\,002 = 7 \times 13 \times 22$, donnant GKV,
$2\,002 = 7 \times 11 \times 26$, donnant GKZ.

4.5. Le partage des terres selon Léon Tolstoï



4.6. Calculer sans calculette

Sachant que $12\,345\,679 \times 9 = 111\,111\,111$, on va décomposer $186\,354$ en :
$2 \times 9 \times 10\,000 + 7 \times 9 \times 100 + 6 \times 9$.
Le calcul à faire se réduit alors à :
$2\,222\,222\,220\,000 + 77\,777\,777\,700$
$+ 666\,666\,666 = 2\,300\,666\,664\,366$.

5.1. Les fausses suites de Fibonacci

30 et 45.

5.2. La tour non penchée de Pise

Les solutions sont fort nombreuses, et plusieurs développements différents ont été proposés par les élèves, le nombre de possibilités grandissant surtout lorsque l'on décompose les côtés latéraux en trois carrés identiques.
Il n'est pas évident de les obtenir toutes. Certains développements sont triviaux et nous sommes sûrs que les lecteurs les ont découverts.
Quant à présenter une réponse exhaustive, le problème reste ouvert et nous attendons vos propositions !

5.3. Les marins malhonnêtes

Les coupables sont Bonno et Dido : l'innocence des autres est prouvée « en boucle » (A d'où C d'où E d'où A). Le coupable B a voulu couvrir son complice D. Quant à F, que vient-il faire dans cette histoire ? On se le demande…

5.4. Le parterre de fleurs de Frédéric II de Hohenstaufen

Aire du triangle intérieur : $BH/2 = 16 \times 12/2 = 96$.
Aire des trois rectangles :
$20 \times 2 + 12 \times 2 + 16 \times 2 = (20 + 12 + 16) \times 2 = 96$.
Aire du disque : $\pi R^2 = \pi \times 2^2 \approx 12{,}56$.
Réponse : 204,56 pieds carrés.

5.5. La numération indo-arabe

1 soltek = $\frac{10}{100}\cdot\frac{20}{100}\cdot\frac{30}{100}$ vorek = $6/1\,000$ vorek ;
1 wrak = $4/10$ vorek ;
1 soltek = $6/400$ wrak = 1,5 % wrak.

F1.1 Trouver chaussure à son prix

25 %.

F1.2. Mais où est Nouméa ?

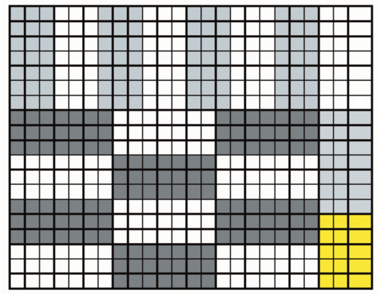
Il y a six trajets possibles :
LOM, LMO, OLM, OML, MLO, MOL.

F1.3. Il y en a un peu plus : je vous le mets ?

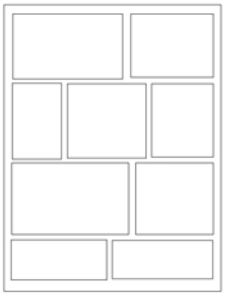
1	+	5	×	5	–	1	4	×	3	=	7	×	9

F1.4. Des coupes et découpes (pour la coupe ?)

On peut disposer vingt et une étiquettes, ce qui est bien un maximum puisque le résidu (en jaune) est inférieur à la surface d'une étiquette.



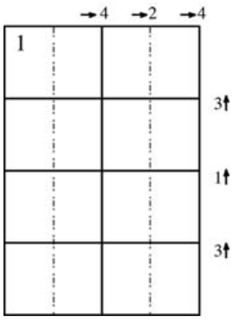
6.1. La première planche de Pythagone



Il n'y a pas de difficulté particulière dans cet exercice, si ce n'est le nombre d'opérations à effectuer. Un raisonnement simple consiste à calculer l'aire non occupée par les cases :
Aire totale de la feuille :
$29{,}7 \times 21 \text{ cm}^2 = 623{,}7 \text{ cm}^2$.
Aire des bords de gauche et de droite :
$2 \times 1{,}6 \times 29{,}7 \text{ cm}^2 = 95{,}04 \text{ cm}^2$.
Aire restante des bords supérieur et inférieur :
$2 \times 2{,}3 \times (21 - 2 \times 1{,}6) \text{ cm}^2 = 81{,}88 \text{ cm}^2$
Aire des séparations horizontales :
$3 \times (21 - 2\times1{,}6 - 2{,}3\times2 - 0{,}5\times3) : 4 \text{ cm} = 5{,}9 \text{ cm}$.
Nombre de séparations verticales : 5.
Aire des séparations verticales :
$5 \times 0{,}5 \times 5{,}9 \text{ cm}^2 = 14{,}75 \text{ cm}^2$.
Aire de la partie non occupée, en cm^2 :
$95{,}04 + 81{,}88 + 26{,}7 + 14{,}75 = 218{,}37$.
L'aire occupée par les dessins vaut :
$623{,}7 \text{ cm}^2 - 218{,}37 \text{ cm}^2 = 405{,}33 \text{ cm}^2$.
La partie de la feuille occupé par les cases correspond à $405{,}33 / 623{,}7 = 0{,}64987975$, soit à peu près 64,99 %.

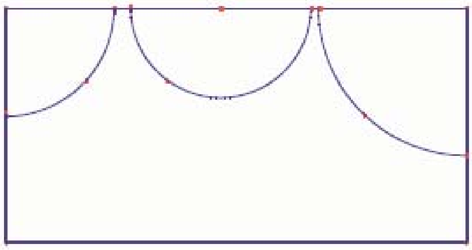
6.2. Problème de pagination

En suivant le pliage demandé, le A se trouve à la page 26. L'ordre des plis est indiqué ci-contre.



6.3. L'importance du phylactère

Le plus simple est de prendre le même rayon pour les trois fragments de cercle constituant les « bulles » ou *phylactères*, en sachant que la surface cumulée des trois fragments doit représenter



1/4 de l'aire totale, soit $10 \times 6/4 \text{ cm}^2 = 15 \text{ cm}^2$.
Les deux quarts de disque ajoutés au demi-cercle constituent un cercle complet. Cherchons le rayon r du disque (en cm), sachant que $\pi \times r^2 = 15$.
En donnant à π la valeur arrondie 3,14, on trouve $r^2 = 15/3{,}14 \approx 4{,}7771$, ce qui donne $r \approx 2{,}2$ cm.
Il ne reste plus alors qu'à faire le dessin.

6.4. Question gastrologique

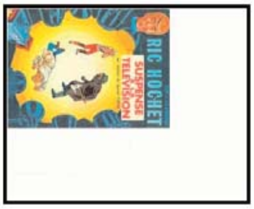
Notons a la pêche, b la pomme, c la poire et d la pastèque. De même, notons P pour Priscillia, Q pour Quentin, R pour Roxane et S pour Sammy.
Si P prend a, Q prend d et R n'a plus rien à manger puisqu'il n'aime ni b ni c. Donc P doit prendre c. Comme Q et R ne prennent pas b, c'est S qui le prendra. Mais Q ne prend pas d, et ne peut donc plus prendre que a, ce qui laisse d à R.
Ouf ! tout le monde est satisfait.

6.5. Les piles qui tombent pile !

Combien de BD peut-on placer au maximum dans chaque caisse ? Pas facile. Il faut procéder de manière systématique en envisageant tous les cas. La hauteur de la caisse ne permet pas de placer les BD verticalement. On peut donc soit les mettre à plat et compléter, soit les ranger horizontalement et compléter.

Mettons-les à plat, on peut en mettre 37 en laissant un espace en hauteur de 0,4 cm. Plaçons-les comme sur l'illustration ci-contre.
On dispose encore de 40 – 22,9 cm = 17,1 cm à droite, permettant de placer 21 BD présentant leur dos, et de 35 – 30,3 cm = 4,7 cm en dessous, permettant le placement de 5 BD.
On arrive donc à 37 + 21 + 5 = 63 BD.

Faisons tourner les 37 BD à plat : il reste alors 35 – 22,9 cm = 12,1 cm permettant le placement de 15 BD en dessous.
À droite, il reste 40 – 30,3 cm = 9,7 cm permettant de placer 12 BD.



Somme totale : 37 + 15 + 12 = 64 BD.
Ce qui est la solution optimale.

En effet, en les rangeant dos vers le dessus de la boîte, on constate que l'on peut utiliser pleinement les 40 cm de la longueur de la boîte, autorisant ainsi la mise en place de 50 BD et libérant un espace de 4,7 cm autorisant 5 BD. On peut encore en mettre à plat au-dessus, puisqu'il reste 30 – 22,9 = 7,1 cm soit 8 BD.

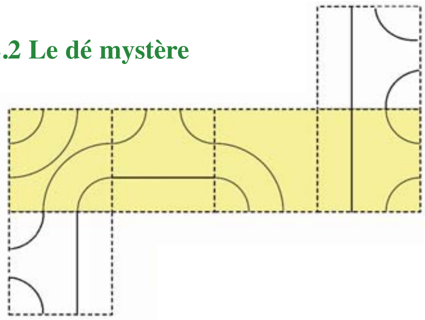
On en est à 50 + 5 + 8, soit à nouveau 63 BD.
Rangeons-les dans l'autre sens : on peut en mettre (partie entière de) 35/0,8, soit 43, sans compter les 12 à gauche et les 8 au-dessus.

On arrive à 43 + 12 + 8 = 63 BD.
Notre pauvre grand-mère ne pouvant soulever que 12 kg, chaque caisse ne peut contenir au maximum que 12 – 0,355 = 11,645 kg de BD, soit au plus (partie entière de) 11,645/0,415 = 28. Il lui faudra disposer ses 204 BD dans huit caisses.

F2.1. Les 3 opérations

5 × (8/2 + 7).

F2.2 Le dé mystère

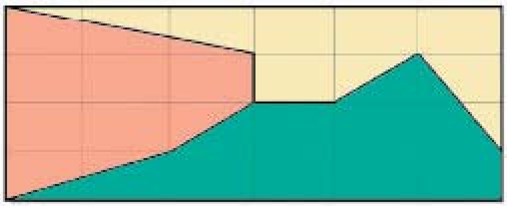


F2.3. Combien d'*Astérix* valent huit *Tuniques bleues* ?

Huit *Tuniques Bleues* valent six *Spirou*, qui valent neuf *Tintin*, soit six *Mafalda* ou encore douze *Gaston*. Ceux-ci valent neuf *Astérix*.

F2.4. Quelle partie chacun a-t-il reçue ?

Maud a reçu la partie de gauche en rose, Kevin la partie du haut en beige et Nancy la partie inférieure droite en vert. Le tapis est divisé en vingt-quatre rectangles qu'il faut comptabiliser en regroupant les morceaux.



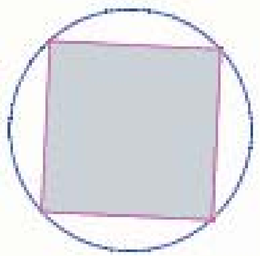
Partie rose (de bas en haut) :
1,5 + 3 + 2,5 + 1 = 8.
Maud a donc reçu 8/24 = 1/3 du tapis.
Partie beige (par lignes) : 4,5 + 1,5 + 1 = 7.
Kevin n'a droit qu'à 7/24 du tapis.
La part du lion revient à Nancy (de droite à gauche, par colonnes) : 2 + 2,5 + 2 + 1,5 + 1 = 9 parts, soit 9/24 ou encore 3/8 du tapis.

7.1. Explorer de nouveaux mondes étranges

Numérotons les sept étapes du trajet de 1 à 7.
– Saturne est à placer en 1,
– Neptune est avant Jupiter,
– Uranus est après Jupiter (donc après Neptune), après Vénus et après Mars,
– Mercure est après Uranus, donc en 7, et Uranus sera en 6.
Il reste à placer Mars, Neptune, Jupiter et Vénus en tenant compte du fait que Neptune est avant Jupiter. On dénombre ainsi douze solutions en plaçant successivement en deuxième position Mars, Neptune ou Vénus.
Ces solutions sont détaillées dans le tableau en page suivante.

1	2	3	4	5	6	7
Saturne	Mars	Vénus	Neptune	Jupiter	Uranus	Mercure
Saturne	Mars	Neptune	Vénus	Jupiter	Uranus	Mercure
Saturne	Mars	Neptune	Jupiter	Vénus	Uranus	Mercure
Saturne	Vénus	Mars	Neptune	Jupiter	Uranus	Mercure
Saturne	Vénus	Neptune	Mars	Jupiter	Uranus	Mercure
Saturne	Vénus	Neptune	Jupiter	Mars	Uranus	Mercure
Saturne	Neptune	Mars	Vénus	Jupiter	Uranus	Mercure
Saturne	Neptune	Mars	Jupiter	Vénus	Uranus	Mercure
Saturne	Neptune	Vénus	Jupiter	Mars	Uranus	Mercure
Saturne	Neptune	Vénus	Mars	Jupiter	Uranus	Mercure
Saturne	Neptune	Jupiter	Mars	Vénus	Uranus	Mercure
Saturne	Neptune	Jupiter	Vénus	Mars	Uranus	Mercure

7.2. Observations télescopiques



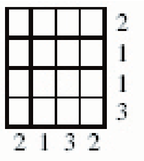
Pour trouver l'aire grisée, il faut prendre l'aire des disques correspondants, puis retrancher l'aire du disque noir diminuée de l'aire du carré de côté AB, ce qui revient à ajouter l'aire des disques correspondants et l'aire du carré de côté AB, puis retrancher l'aire du grand disque central.
Calcul de l'aire des deux disques de diamètre AB :
$2 \times \pi \times 1{,}414^2 \approx 12{,}5626$.
Calcul de l'aire du carré de côté AB :
$2{,}828^2 \approx 7{,}9976$.
Calcul de l'aire du grand disque central :
$\pi \times 2^2 \approx 12{,}5664$ (à retrancher).
L'aire grisée mesure donc environ
$12{,}5626 + 7{,}9976 - 12{,}5664 = 7{,}9938$,
soit à peu près 8.
Il y a une autre manière d'expliquer la recherche de l'aire grisée :
Calculer d'abord l'aire à ôter des demi-disques extérieurs (en blanc sur la construction) : aire du grand disque central diminuée de l'aire du carré :
$\pi \times 2^2 - 2{,}828^2 \approx 12{,}5664 - 7{,}9976 \approx 4{,}5688$.
Calculer ensuite l'aire des quatre demi-disques de diamètre AB : $2 \times \pi \times 1{,}414^2 \approx 12{,}5626$.
Effectuer la soustraction :
$12{,}5626 - 4{,}5688 = 7{,}9938$.
Un calcul plus précis (en utilisant $\sqrt{8}$ et non 2,828) donnerait 8.
Conclusion amusante : l'aire obtenue ne dépend donc pas de π.

7.3. Curieuses pratiques monétaires

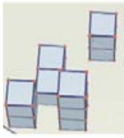
Distinguons d'abord le multiple de « peaux de lapin », à savoir la pierre précieuse, qui ne sera pas utilisée. Plaçons ensuite les sous-multiples de « peau de lapin » dans l'ordre décroissant : coquillage (1/16), fruits secs (1/30), galet (1/36), et bouton (1/50).
On doit obtenir 1,56, soit une peau de lapin et 56/100 de peau de lapin.
Cherchons des liens entre les sous-multiples et des centièmes (puisqu'il faut en obtenir 56).
4 coquillages = 25/100 peau de lapin ;
3 fruits secs = 10/100 peau de lapin ;
9 galets = 25/100 peau de lapin ;
1 bouton = 2/100 peau de lapin.
Cherchons ensuite des façons différentes d'obtenir 1,56 avec moins de cinquante objets :
1 peau de lapin, 18 galets et 3 boutons ;
1 peau de lapin, 8 coquillages et 3 boutons ;
1 peau de lapin, 4 coquillages, 9 galets et 3 boutons ;
1 peau de lapin, 9 galets, 4 coquillages et 3 boutons ;
1 peau de lapin, 15 fruits secs et 3 boutons ;
1 peau de lapin et 28 boutons ;
24 coquillages et 3 boutons ;
20 coquillages, 9 galets et 3 boutons ;
16 coquillages et 28 boutons ;
16 coquillages, 15 fruits secs et 3 boutons ;
16 coquillages, 18 galets et 3 boutons ;
12 coquillages, 9 galets et 28 boutons ;
8 coquillages, 30 fruits secs et 3 boutons ;
8 coquillages, 36 galets et 3 boutons ;
8 coquillages, 15 fruits secs, 18 galets, 3 boutons,
45 fruits secs et 3 boutons.
Voici quelques solutions proposées utilisant des fractions dont les dénominateurs sont des puissances de 2 :
1/4 pierre précieuse et 28 boutons ;
1/4 pierre précieuse, 15 fruits secs et 3 boutons ;
1/4 pierre précieuse, 8 coquillages et 3 boutons ;
1/4 pierre précieuse, 1/8 pierre précieuse et 3 boutons, 3/8 pierre précieuse et 3 boutons ;
1/4 pierre précieuse, 18 galets et 3 boutons ;
1/8 pierre précieuse, 16 coquillages et 3 boutons ;
1/16 pierre précieuse, 20 coquillages et 3 boutons ;

1/8 pierre précieuse, 36 galets et 3 boutons;
1/16 pierre précieuse, 4 coquillages, 15 fruits secs, 18 galets et 3 boutons.

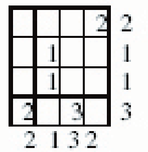
7.4. Les C.C.C. – Civilisations-Carrés-Cubes



Nombre de cubes vus aux différents emplacements:

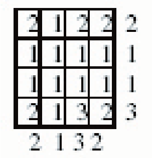


Placement du nombre minimum de cubes de façon optimale, en utilisant essentiellement les cases d'intersection entre lignes et colonnes contenant les mêmes nombres, puis en plaçant ce qui reste (plusieurs solutions).



Quelle que soit la solution trouvée, il y a toujours neuf cubes au total.

Ajout d'un maximum de cubes sur chaque ligne (par exemple un cube sur chaque case d'une rangée où l'on voit 1) en tenant compte des cubes vus. Il y a une seule solution qui donne vingt-trois cubes au total.



7.5. Comprenons les brenoms

La question était formulée de façon assez complexe.
Le calcul à effectuer (en «brenom»):

```
    4 0 1 2 3
–     5 0 6 8
=   9 9 4 3 2
```

doit se faire en commençant par la gauche en se plaçant dans un abaque inversé
U | D | C | UM | DM.
(Vérification dans notre système de numération: 32 104 – 8 605 = 23 499.)

F3.1. De quoi ai-je l'aire ?

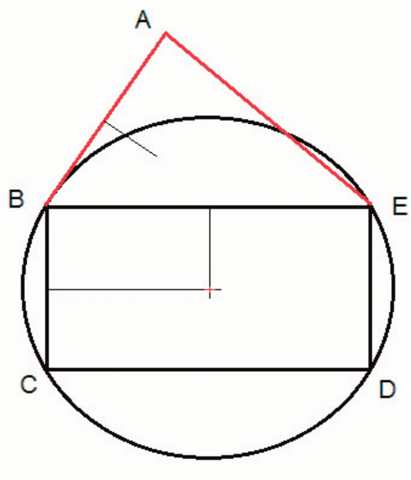
Il y a quatre cubes ayant chacun six faces. Mais trois faces sont partagées (à compter deux fois) et font partie de l'intérieur de la forme. Il reste donc 18 faces de 16 cm^2, soit un total de 288 cm^2.

F3.2. Se prendre la tête au carré

Pour partager un rectangle de dimensions 240 mm × 168 mm en le plus petit nombre de carrés possible, on place un grand carré de 168 mm de côté. Il reste une bande de 168 sur 72 dans laquelle on place deux carrés de 72 mm de côté. Il reste une bande de 24 sur 72 dans laquelle on peut placer exactement trois carrés de 24 mm de côté. Le plus petit carré représente
242/(240 × 168) = 0,01429 (à 10^{-5} près).

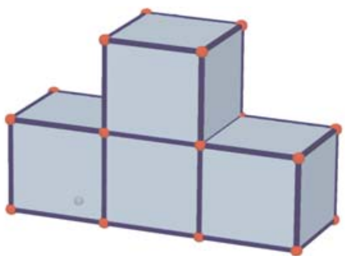
F3.3. Les traits sûrs menant au trésor

Le centre du cercle BCE est à l'intersection des médiatrices de BE et BC. Le point cherché est à l'intersection du cercle et de la médiatrice de AB.



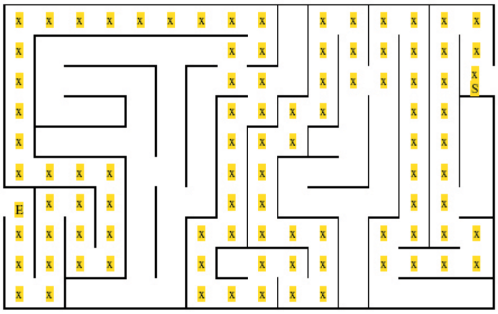
F3.4. Il y a des maths partout

Si aucune fille n'est prof de maths et que le statisticien est un garçon, les deux filles sont donc architecte et astronome. Cyril ne peut pas être architecte, Béatrice doit donc être astronome, ce qui donne Dora architecte (et non exploratrice…) et donc Abdel statisticien. Cyril a donc la plus belle profession du monde: professeur de mathématiques.



8.1. Comprendre la labyméthode

Plusieurs solutions satisfaisant la méthode sont possibles avec l'énoncé donné. Voici le chemin le plus court :



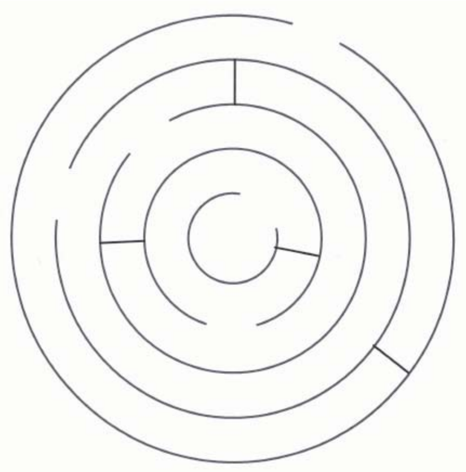
8.2. Sortir du labynombre

En mauve, les cases accessibles, en jaune le chemin le plus court, qui ne comporte aucun retour en arrière, et est donc constitué de huit déplacements horizontaux et de huit déplacements verticaux.

→	12	36	18	9	33	11	1	
	6	9	72	36	3	22	33	
	18	24	3	45	15	60	66	
	9	72	2	90	10	120	15	
	36	2	70	5	50	25	75	
	4	32	7	35	450	75	150	
	96	9	63	189	9	144	6	
	32	81	54	27	81	9	108	
	2	27	3	54	18	3	12	→

8.3. Construire un labycercle

Le dessin à tracer est du type suivant (l'emplacement des murs et des passages peut varier).



Recherche de la longueur totale des parois :

Périmètre total des cercles :

$2\pi\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$ m $= 30\pi$ m.

Longueur totale des ouvertures (à retrancher) :

$1{,}2 \times 5$ m $= 6$ m.

Parois à ajouter entre les cercles : 4×1 m $= 4$ m.

Longueur totale des parois :

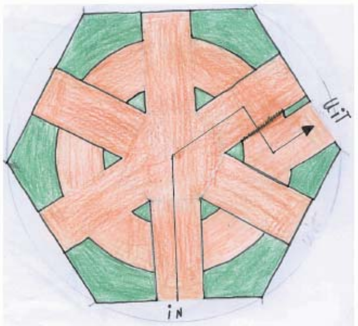
30π m $- 6$ m $+ 4$ m $= 30\,\pi$ m $- 2$ m $\approx 92{,}248$ m.

8.4. Comment sortir d'un labycube ?

1 × avant + 7 × bas + 1 × droite + 1 × gauche + 4 × avant + 1 gauche + 1 × droite (soit au total seize mouvements).

8.5. Construire un labylibre sous contraintes

Voici l'une des nombreuses propositions reçues :



F4.1 Quelle est la fonction des fractions ?

On pouvait avoir

$2 : (3 : (4/5)) = 2 : (15/4) = 8/15$,

$2 : ((3/4) : 5) = 2 : (3/20) = 40/3$,

$(2/3) \times (5/4) = 10/12 = 5/6$,

$(2 \times 4/3)/5 = 8/15$ (*cf.* plus haut),

$((2/3) : 4)/5 = (2/12) : 5 = 2/60 = 1/30$.

Les réponses possibles sont donc : 8/15, 40/3, 5/6 et 1/30.

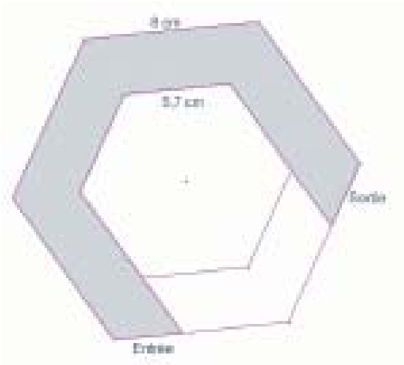
F4.2. Quadrillages multiples

A →	1	1	1	1
1 ↓	2	3	4	5
1	3	6	10	15 B

Il y a quinze trajets possibles (on retrouve les nombres du triangle de Pascal).

F4.3. Le fil d'Ariane

On peut découper la figure en deux trapèzes et deux parallélogrammes.



Aire d'un des trapèzes : $(8 + 5{,}7)/2 \times 2 = 13{,}7\ \text{cm}^2$.
Aire d'un des parallélogrammes : $8 \times 2 = 16\ \text{cm}^2$.
Au total :
$2 \times (13{,}7 + 16)\ \text{cm}^2 = 2 \times 29{,}7\ \text{cm}^2 = 59{,}4\ \text{cm}^2$.

F4.4 Grandeur et décadence des labyrinthes

Nouvelle aire = 1,2 × 1,5 × aire d'origine = 1,8 × aire d'origine. L'aire a donc augmenté de 80 %.

9.1. Le carré magique

De proche en proche, le carré se complète.
La première diagonale donne la somme à obtenir : 65.

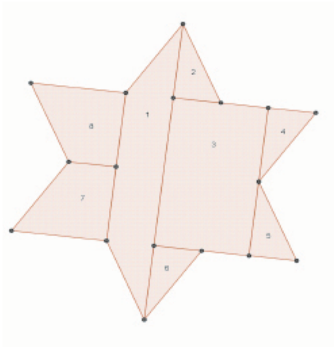
11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

9.2. Naissance de Martin Gardner

Comme le PPCM de son jour et de son mois de naissance est 210, on peut déjà décomposer 210 en 2 × 3 × 5 × 7.
Comme son jour et son mois de naissance sont chacun le produit de deux nombres premiers, et que son jour de naissance est un multiple de 3, il ne nous reste que trois possibilités : jour : 3 × 2 et mois : 5 × 7 (impossible puisqu'il n'y a que douze mois dans une année !), jour : 3 × 5 et mois : 2 × 7 (impossible !) et jour : 3 × 7 et mois : 2 × 5. On sait donc que Martin Gardner est né un 21 octobre.
L'année de naissance est un multiple de 66, donc de 2, de 3 et de 11. Comme son année de naissance est le produit de quatre nombres premiers différents, il faut multiplier 66 par un nombre premier, sachant que le résultat doit être compris entre 1 700 (> 66 × 25) et 2 000 (< 66 × 30). Le seul nombre premier compris entre 26 et 30 est 29, ce qui donne 1914 comme année de naissance.
La date de naissance de Martin Gardner est donc le 21–10–1914. Il nous a quittés le 22–05–2010.

9.3. Fragments d'étoiles

L'idée est de découper toute l'étoile en morceaux de type 2, 4, 5, 6 qui serviront d'unités.
Les pièces 7 et 8 se décomposent en trois pièces 2.
La pièce 3 se décompose en huit pièces 2.
La pièce 1 se décompose en six pièces 2.
L'étoile peut donc être découpée en vingt-quatre pièces 2. Toutes les pièces peuvent donc s'exprimer en 24^{e}, sans oublier de simplifier ensuite la fraction si c'est possible.



N° morceau	Fraction
1	1/4
2	1/24
3	1/3
4	1/24
5	1/24
6	1/24
7	1/8
8	1/8

9.4. Explosion de formes

Figures convexes à trouver :
– 1 triangle (avec superposition des formes),
– 2 rectangles (sans ou avec superposition),
– 2 parallélogrammes (sans ou avec superposition),
– 2 trapèzes isocèles (sans ou avec superposition),
– 2 trapèzes rectangles (avec superposition partielle, peu trouvé, ou totale),
– 1 pentagone (sans superposition),
– 1 hexagone (sans superposition).
Figures non convexes mais possédant un axe de symétrie à trouver :
– 2 pentagones (sans ou avec superposition, peu trouvés),
– 2 hexagones (sans ou avec superposition, peu

trouvés),
– 2 heptagones (avec superposition, peu trouvés),
– 1 octogone (avec superposition, très peu trouvé).
Figures non convexes mais possédant un centre de symétrie à trouver :
– 1 hexagone (sans superposition),
– 2 octogones (sans superposition, peu trouvés).
Figures non convexes, obtenues par translation sans superposition :
– 2 hexagones (translation verticale ou oblique 45°), peu trouvé.
Figures non convexes, obtenues par symétrie et translation, sans superposition :
– 2 heptagones, peu trouvé,
– 1 octogone, très peu trouvé.
Figure non convexe, obtenue par rotation, avec superposition :
– 1 pentagone, peu trouvé.
Figure non convexe, obtenue par rotation et symétrie, avec superposition :
– 1 hexagone, très peu trouvé.
Figures non convexes, obtenues par rotation et translation, sans superposition :
– 2 hexagones, peu trouvé,
– 1 heptagone, très peu trouvé.
Figure non convexe, obtenue par rotation et translation, avec superposition :
– 1 hexagone.
Figures non convexes, obtenues par rotation, symétrie et translation, sans superposition :
– 1 pentagone, très peu trouvé,
– 2 hexagones, assez peu trouvés,
– 1 heptagone, assez peu trouvé.

9.5. Le podium à lapins

Pour déterminer le nombre de blocs utilisés, il suffit d'additionner le nombre de blocs de chaque couche, ce qui donne : $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$. Quarante-cinq blocs sont donc nécessaires. Pour les surfaces latérales, le plus simple est de compter pour chaque face le nombre de rectangles visibles, ce qui donne $18 + 24 + 18 + 24 = 84$. L'aire à peindre vaut donc $84 \times 30 \times 10\ \text{cm}^2 = 25200\ \text{cm}^2 = 252\ \text{dm}^2 = 2{,}52\ \text{m}^2$. Comme un litre de peinture permet de peintre 1m^2, il faudra 2,52 l de peinture.

F5.1. Le tour de la ficelle

Aire du carré initial : $49\ \text{cm}^2$.
Recherche du rayon du disque : $2\,\pi\,R = 28$, donc $R = 28 : (2\,\pi)$, ce qui donne $R \approx 4{,}456$ cm.
Recherche de l'aire du disque, qui vaut environ $62{,}389\ \text{cm}^2$.
Aire ajoutée : $13{,}389\ \text{cm}^2$.

F5.2. Cartes à points

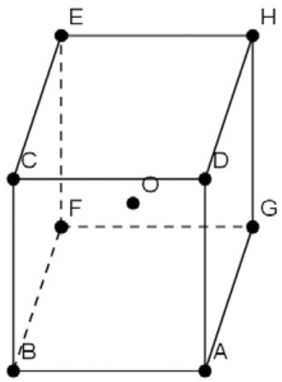
♦ + ♠ = ♠ + ♠ + ♥ se simplifie en 2 = ♠ + ♥ ou ♥ = 2 – ♠.
♥ + ♦ = ♠ + ♠ donne, en utilisant les deux informations, 2 – ♠ + 2 = 2 ♠, c'est-à-dire 4 = 3 ♠.
On a donc ♠ = 4 / 3 et ♥ = 2 / 3.
♥ + ♣ + ♣ = ♠ peut s'écrire 2 ♣ = 4 / 3 – 2 / 3, ce qui donne ♣ = 1 / 3.
La vérification peut se faire avec la dernière équation ♦ + ♣ + ♣ = ♠ + ♥ + ♥ :
2 + 2 / 3 = 4 / 3 + 2 / 3 + 2 / 3.
Conclusion : ♥ = 2 / 3 ;(♦ = 2), ♣ = 1 / 3 et ♠ = 4 / 3.

F5.3. Mini-opérations

$1 = (3 - 2) : 1$,
$2 = 3 + 1 - 2$,
$3 = 3 \times (2 - 1)$,
$4 = 3 + 2 - 1$,
$5 = (3 + 2) \times 1$,
$6 = 3 + 2 + 1$,
$7 = 3 \times 2 + 1$,
$8 = (3 + 1) \times 2$,
$9 = 3 \times (2 + 1)$.

F5.4. Des triangles dans un cube

Départ : ABO.
Il y a onze nouveaux triangles à citer : ADO, AGO, BCO, BFO, CDO, CEO, DHO, EFO, EHO, FGO, GHO.



10.1. Combien de parts pour votre cœur ?

Ce problème demande d'imaginer des coupes non symétriques, et ensuite de structurer les segments pour qu'ils coupent un maximum de régions. La dernière question, plus complexe, sert à distinguer les raisonnements plus élaborés.
Le premier coup de couteau (en vert) coupe le cœur en trois (ligne verte).
Le deuxième coup de couteau doit couper la ligne précédente et les deux parties du cœur, ce qui donne trois parts supplémentaires, soit six en tout (ligne bleue).
Le troisième coup de couteau doit couper les deux lignes précédentes et les deux parties du cœur, ce qui donne quatre parts de plus, soit dix en tout (ligne rouge « moins inclinée »).
Enfin, le quatrième coup de couteau coupe les trois lignes précédentes et le cœur (en deux endroits), ce qui détermine cinq parts supplémentaires, soit quinze au total (dernière ligne rouge).

10.2. C'est du gâteau !

Ici, il faut ordonner les nombreuses informations reçues. La première information nous dit que Benoît prend la frangipane. Comme le gâteau de Chloé commence par la même lettre que celui d'Esra, elles ne peuvent prendre que le moka et le merveilleux. Comme Esra ne prend la tartelette que si Alice prend l'éclair et qu'Esra ne prend pas cette appétissante tartelette, on peut en déduire qu'Alice ne prend ni l'éclair, ni le chou à la crème, il lui reste donc la tartelette aux fruits. David, ne pouvant plus prendre ni le merveilleux ni la tartelette aux fruits, prendra donc l'éclair au chocolat. Farid prendra alors le chou à la crème, et comme il ne le prend que si Esra prend le moka, celle est obligée (la pauvre !) de déguster le moka. Chloé prendra le merveilleux.

10.3 Mélanges de jus au jugé

Ce problème fait appel à la règle de trois (proportions) et aux conversions simples. La vérification de la plausibilité de la réponse peut aider en cas d'erreur. Pour neuf verres, il faut 60 cl de jus d'orange, 60 cl de jus de pamplemousse, 45 cl de Tonic frais et 9×15ml, soit 13,5 cl d'eau, ce qui nous fait 178,5 cl. Par personne, il faut donc un verre dont la contenance sera au minimum de 178,5 / 9 cl, soit 19,83 cl.
Pour vingt-quatre personnes, il faudra pour le jus d'orange et le jus de pamplemousse $60 : 9 \times 24$ cl, soit 160 cl ou 1,6 l. Pour vingt-quatre personnes, il faudra trois quarts de cette capacité pour le Tonic (ou $45 : 9 \times 24$ cl), soit 1,2 l.

10.4. Un partage original

Ici, il faut s'apercevoir que l'on peut également couper le gâteau horizontalement (voire en diagonale, mais ceci est plus complexe), ce qui permettra d'avoir des parts plus grandes, que l'on pourra ensuite découper en parts de même volume, mais dont l'apparence peut être totalement différente.

10.5. Partage et commerce inéquitables

Il s'agit d'un problème de partage proportionnel, parfois abordé dès l'école primaire, mais pouvant aussi l'être lors des premières mises en équation de problèmes. Il y a 960 noisettes. Les parents recevant la moitié (pour tous les deux), recevront 480 noisettes ensemble, soit 240 noisettes chacun (comme c'est injuste !). Il reste 480 noisettes à partager, sachant que Lucas reçoit douze parts, Marie quatre parts, Kevin six parts et Astrid dix parts. Les 480 noisettes doivent donc être partagées en trente-deux parts ($12 + 4 + 6 + 10 = 32$). Une part est donc constituée de $480 : 32$ noisettes, soit quinze noisettes. Lucas reçoit donc cent quatre-vingts noisettes, Marie soixante noisettes, Kevin quatre-vingt-dix noisettes et Astrid cent cinquante noisettes.

Les solutions du trophée Lewis Carroll

Voici les réponses aux épreuves du trophée Lewis Carroll.

Mathématiques 6^e–5^e

1. 1, 4, 1, 1 ou 1, 3, 1, 3 ou 1, 2, 3, 2.

2. 12 cartes noires.

3. 12 fois.

4. 7.

5. Abel : 12 ans, Béa : 11 ans, Camille : 13 ans.

6. 160,96 cm^2.

Mathématiques 4^e–3^e

1. 19.

2. 74 444.

3. 50 nombres.

4. 6 075 ou 2 025.

5. 1 738 × 4 = 6 952.

6. 15,09 cm^2.

Mathématiques Lycéens

1. 7 cases.

2. 28 bulletins D.

3. 669 996.

4. 10 125 ou 30 375 ou 50 625 ou 70 875.

5. 1.

6. 4,33 cm^2.

Lettres 6^e–5^e

1. 3 5 1 4 2.

2. GAGNE.

3. OCTET.

4. CORROSION.

5. ET TACHENT SA PALEUR.

6. On pouvait former les deux mots : DEMODULIEZ (du verbe DEMODULER) et LUXE.

Lettres 4^e–3^e

1. 3 1 5 4 2.

2. P O I D S (erreur sur le I dans l'énoncé).

3. OMEGA.

4. PALTOQUET.

5. DEHORS CROISEES.

6. On pouvait former les deux mots : DEMODULIEZ (du verbe DEMODULER) et LUXE.

Lettres Lycéens

1. 3 5 1 4 2.

2. P O I D S (erreur sur le I dans l'énoncé).

3. DEPOT.

4. PALTOQUET.

5. TE MEDAILLERA.

6. On pouvait former les deux mots : DEMODULIEZ (du verbe DEMODULER) et LUXE.