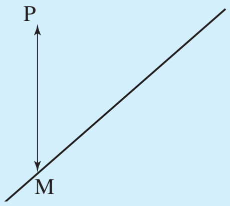
Géométrie en lycée et calcul formel

Distance d'un point à une droite

Certaines notions de géométrie plane peuvent être revisitées à l'aide du calcul formel. Il s'agit avant tout de confier des pans de calculs à un logiciel, sans toutefois laisser croire que le calcul formel répond à toutes les questions que se pose l'élève ou qu'il remplace toute activité mathématique. C'est en sériant les champs d'interventions du calcul formel dans les études qui sont conduites avec les élèves que ceux-ci pourront recourir de façon raisonnée à l'utilisation de ces logiciels. Voyons pour commencer comment établir une formule classique, celle donnant la distance d'un point à une droite.

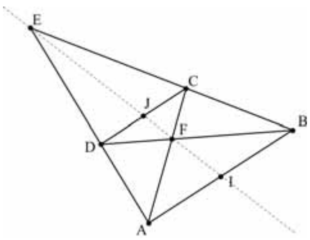


Dans le plan repéré, on se donne la droite d'équation $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0,0)$, ainsi que le point P de coordonnées (x_P, y_P). On cherche la distance entre le point P et la droite (D).
Soit f la fonction définie par $f(x) = PM^2$, où M représente le point de la droite (D) de coordonnées (x, y). Question : existe-t-il une valeur de x pour laquelle f soit minimale ?
On commence par établir une expression de $f(x)$:

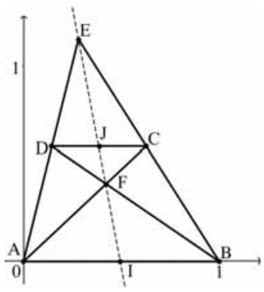
$$\begin{aligned} f(x) = PM^2 &= (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 = (x - x_P)^2 + (-(a/b)\, x - c/b - y_P)^2 \\ &= (x - x_P)^2 + ((a/b)\, x + c/b + y_P)^2. \end{aligned}$$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, il est aisé de définir la fonction f puis de développer l'expression de $f(x)$ en fonction de x. On reconnaît un trinôme du second degré en x, du type $Ax^2 + Bx + C$, dont le coefficient dominant A est strictement positif. Ce trinôme admet donc un minimum, en $-B/(2A)$. On laisse au logiciel de calcul formel le soin de conduire le calcul de $f(-B/(2A))$. En prenant la racine carrée, on obtient la distance du point P à la droite (D).

Une propriété du trapèze complet



Soit ABCD un trapèze dont les côtés parallèles sont [AB] et [CD] et tel que ses deux autres côtés soient sécants. On note I et J les milieux des côtés parallèles, E le point d'intersection des droites (AD) et (BC), et F le point d'intersection des diagonales. On se propose de démontrer que les points I, J, E et F sont alignés.



La première étape consiste à choisir un repère adapté. Le repère privilégié ici est centré au point A et est tel que B ait pour coordonnées (1, 0). On note (c, α) et (d, α) les coordonnées respectives des points C et D. Les coordonnées des points I et J sont alors (1/2, 0) et $((c + d)/2, \alpha)$. Lorsque $c + d$ est différent de 1, l'équation réduite de la droite (IJ) est alors

$$y = \frac{2\alpha}{c+d-1}x - \frac{\alpha}{c+d-1}.$$

On détermine ensuite les coordonnées du point E. Lorsque d est non nul, l'équation de la droite (AD) est $y = \frac{\alpha}{d}x$.

De même, lorsque c est différent de 1, la droite (BC) a pour équation $y = \frac{\alpha}{c-1}x + \frac{\alpha}{1-c}$. La résolution du système des deux équations ainsi obtenues donne les coordonnées du point E, à savoir $\left(\frac{d}{1-c+d}, \frac{\alpha}{1-c+d}\right)$. Nous testons ensuite aisément l'appartenance du point E à la droite (IJ).
On détermine enfin les coordonnées du point F. Lorsque c est non nul, la droite (AC) a pour équation $y = \frac{\alpha}{c}x$. De même, lorsque d est différent de 1, la droite (BD) a pour équation $y = \frac{\alpha}{d-1}x + \frac{\alpha}{1-d}$. La résolution du système des deux équations ainsi obtenues donne les coordonnées du point F, à savoir $\left(\frac{c}{1+c-d}, \frac{\alpha}{1+c-d}\right)$. Nous testons ensuite aisément l'appartenance du point F à la droite (IJ). Ainsi, les points I, J, E et F sont alignés.

Pour ce qui relève des différents cas particuliers ($c + d = 1$, $d = 0$, $c = 1$), on pourra faire mener les calculs à différents groupes d'élèves.