Par A. Schärlig et J. Gavin

Problèmes de robinets :

la fausse position a tout bon !

Ça ne rate jamais. Vous parlez d'histoire du calcul devant un public instruit, et à l'heure des questions émerge un souvenir douloureux : les problèmes de robinets. Ils se résolvent pourtant aisément à l'aide de la méthode de la fausse position, aujourd'hui complètement oubliée.

Jérôme Gavin
est professeur
au collège Voltaire
de Genève (Suisse).

Alain Schärlig
est professeur
honoraire à l'université
de Lausanne (Suisse).

Les problèmes de robinets, de baignoires, de citernes ou de moulins sont beaucoup plus anciens que l'algèbre, qui ne s'est répandue dans nos contrées qu'à la Renaissance. Or, on trouve des énoncés « de type problèmes de robinets » dans les *Neuf chapitres*, ouvrage classique de la Chine ancienne qui remonte, selon les sources, entre le deuxième siècle avant notre ère et le troisième siècle. En outre, ces problèmes sont taillés pour être résolus par la méthode de la fausse position (voir en encadré). Et quand on les aborde par ce biais, ils sont très faciles à résoudre !

Dans la gueule du lion

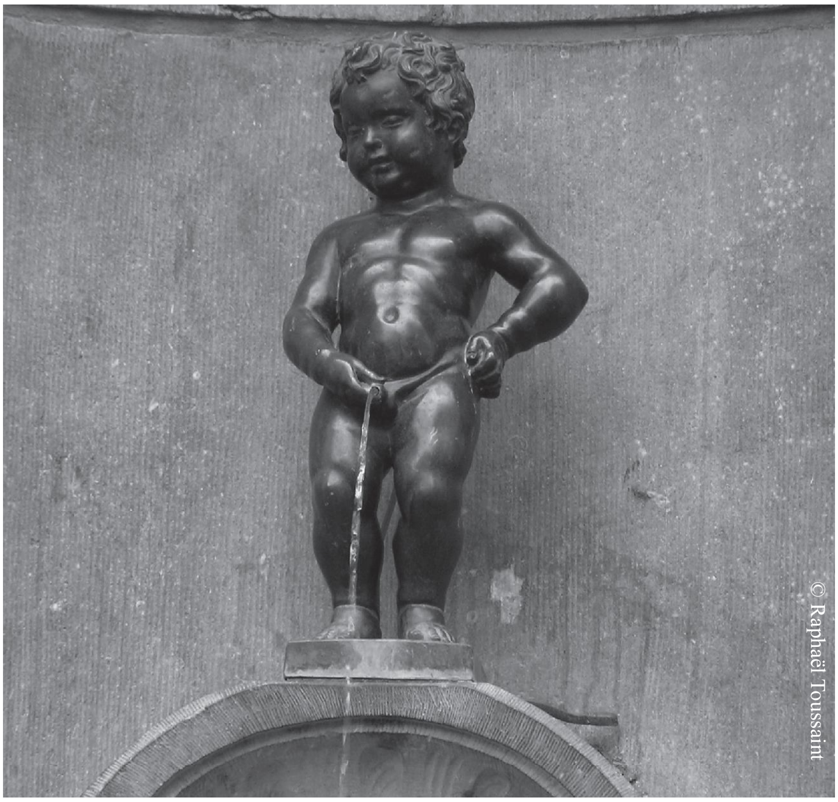
Le problème suivant semble avoir été rédigé par Métrodore (V^e siècle). À cette époque, le jour grec comptait douze « heures ». *« Je suis Lion-de-bronze ; mes deux yeux, ma gueule, et le creux de mon pied droit sont autant de fontaines. Pour emplir le bassin, mon œil droit met deux jours, mon œil gauche en met trois et mon pied en met quatre ; à ma gueule il suffit de six heures. Quel temps vont mettre, réunis, mes yeux, mon pied, ma gueule ? »*
Attaqué par l'algèbre, le problème réclame de raisonner sur les inverses des durées (les débits) ; ce n'est pas évident pour tout le monde. Et une fois l'équation posée, il faut encore se souvenir de quelques rudiments d'algèbre pour la résoudre.
Tandis que si l'on opte pour une fausse position de douze jours par exemple (on choisit 12 parce que c'est pratique, tout en sachant que c'est faux), on peut calculer de tête que, pendant cette durée, l'œil droit remplirait six bassins, le gauche quatre, le pied trois et la gueule vingt-quatre. Cela ferait donc trente-sept bassins. Alors si 12 donne 37, qu'est-ce qui donnera 1 ? On voit vite qu'il faut diviser 12 par 37. Et la réponse est donc 12 / 37 de jour. Facile !

On peut même compliquer, et envisager des fuites. Comme dans ce problème d'un anonyme Byzantin du XIV^e siècle : *« Un récipient est pourvu de cinq tuyaux ; le premier le remplit en deux heures, le deuxième en trois heures, et le troisième en quatre heures ; mais dans le même temps l'un le vide en six heures, l'autre en quatre heures. Quand tous sont ouverts en même temps, en combien d'heures remplissent-ils le récipient ? »*
Laissons la parole à l'auteur, qui adopte une fausse position d'un jour, soit douze heures : *« Prends les fractions du jour de douze heures, soit 1/2 1/3 1/4, cela fait 13. Ensuite des 12 le sixième et le quart, cela fait 5. Soustrais des 13 les 5, il reste 8. »* On devine qu'il fait alors le raisonnement « si 12 heures me donnent 8 récipients, combien d'heures m'en donneront 1 ? ». Mais lui enchaîne directement : *« Par cela divise les 12, cela fait 1 1/2. En ce nombre d'heures, soit 1 1/2, ils remplissent le récipient. »* Pas plus difficile !

Mais pourquoi diable ces problèmes ont-ils été introduits dans les leçons d'algèbre ? Sans doute par pure tradition. Parce que, longtemps avant l'algèbre, ils étaient de ceux qu'on devait savoir résoudre. Or, quand on les a transférés (après avoir enterré la fausse position), on ne s'est pas avisé qu'ils passaient de faciles à compliqués du seul fait du changement d'outil.

Poser le faux pour connaître le vrai

Longtemps avant l'algèbre, des anciens Égyptiens jusqu'au XVII^{e} siècle, la méthode de la fausse position a permis de résoudre d'innombrables problèmes linéaires. Dans sa version simple, elle consiste à poser provisoirement une valeur arbitraire (et donc fausse) pour l'inconnue. D'où son nom de *fausse position*. On trouve évidemment un résultat faux, puis on effectue une règle de trois entre la valeur fausse, le résultat faux, et ce qu'on devrait trouver. De là sort la solution juste.
Dans sa version double, un peu plus complexe, on pose successivement deux fausses positions, on calcule l'écart entre chaque résultat faux et ce qu'on devrait trouver, et on applique un raisonnement de proportionnalité sur ces écarts, que certains auteurs de la Renaissance appelaient des *mensonges* (ou on applique une formule, ce qui est équivalent). Cela fournit la solution juste. Cette version double est applicable dans tous les cas.


© Raphaël Toussaint

À quatre robinets : toute une collection !

En ne prenant comme exemple que les problèmes à quatre robinets (ou quatre trous dans une citerne, ou quatre moulins aux rendements différents), et en s'inspirant de la recherche effectuée par le mathématicien américain David Breyer Singmaster, on peut mentionner sans chercher l'exhaustivité une douzaine d'auteurs connus qui ont proposé de tels énoncés : Mahavira (IX^{e} siècle), Sridhara (IX^{e}–X^{e} siècles), Bhaskara II (XII^{e} siècle), Léonard de Pise (XIII^{e} siècle), Lévi ben Gerson (XIV^{e} siècle), Robert Recorde (XVI^{e} siècle), Cuthbert Tunstall (XVI^{e} siècle), Erasmus Bartholinus (XVII^{e} siècle), Gaspar Schott (XVII^{e} siècle), Jacques Ozanam (XVII^{e}–XVIII^{e} siècles), ainsi que Daniel Adams au début du XIX^{e} siècle. Il est amusant de noter que Nicolo Fontana Tartaglia, grande figure de l'algèbre à la Renaissance, propose deux problèmes de ce genre, mettant en jeu trois moulins, et qu'il les résout… par la fausse position !
Les problèmes de robinets ont été inventés pour la fausse position, qui a régné en reine sur la résolution des problèmes du premier degré durant trois mille ans. Lorsque l'algèbre s'est emparée du marché, elle a par tradition repris les problèmes qui existaient et étaient résolus par fausse position. Sauf que résoudre ces problèmes par l'algèbre est beaucoup plus compliqué. Gros échec pédagogique, et très mauvais souvenir pour beaucoup…

A.S. & J.G.

Une histoire d'étang

Le plus ancien « problème de robinets » connu figure dans les *Neuf chapitres*, traité de calcul fondamental de la Chine ancienne. Au problème 26 du chapitre VI, des canaux se vident dans un étang : *« Supposons qu'on ait un étang, et que cinq canaux s'y jettent. Si on ouvrait le premier d'entre eux, en un tiers de jour il l'emplirait en entier, le suivant en un jour l'emplirait en entier, le troisième en deux jours et demi l'emplirait en entier, le quatrième en trois jours l'emplirait en entier, le cinquième en cinq jours l'emplirait en entier. Si maintenant ils sont tous ouverts, on demande en combien de jours ils rempliront l'étang. »*
Réponse : 15 / 74^{e} de jour. L'auteur part d'une fausse position d'un jour. Elle lui donne un remplissage total de 4 étangs et 14 / 15 (3 + 1 + 2 / 5 + 1 / 3 + 1 / 5, soit 74 / 15 ou 4 + 14 / 15). Il divise alors 1 jour par 4 + 14 / 15, et trouve 15 / 74^{e} de jour.

Référence
Longtemps avant l'algèbre : la fausse position. Ou comment on a posé le faux pour connaître le vrai, des pharaons aux temps modernes.
Jérôme Gavin et Alain Schärlig,
Presses polytechniques
et universitaires romandes, 2012.