Problème 1

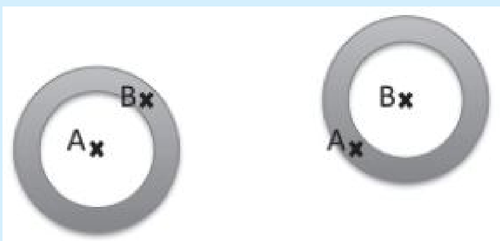
Sur chacune des trois faces sans ouverture, si le nombre de losanges touchant la base par un sommet est L, alors le nombre total de triangles (le long de la base) est L + 1 et le nombre total de losanges (de la base jusqu'au sommet) est L (L + 1) / 2.
Sur la face avec ouverture, quatre triangles remplacent quatre losanges et on enlève onze panneaux (cinq losanges et six triangles). Le nombre de panneaux total est $2L^2 + 6L - 7$. La réponse, **673**, est obtenue pour L = 17.

Problème 3

Si P_i désigne le nombre de parties jouées à la fin du $i^{ème}$ jour, alors $0 < P_1 < P_2 <\ldots< P_{30} = 48$ et $11 < 11 + P_1 < 11 + P_2 <\ldots< 11 + P_{30} = 59$.
Soixante nombres strictement positifs sont inférieurs ou égaux à 59 : le principe des tiroirs nous dit qu'au moins deux sont égaux. Si *i* est différent de *j*, alors $P_i \neq P_j$ et $11 + P_i \neq 11 + P_j$. Donc il existe *k* et *l* tels que $P_k = 11 + P_l$.
Sur la période allant du $(l + 1)^{ème}$ au $k^{ème}$ jour, Gaspard Off a joué exactement **11 parties**.

Série de problèmes 4

A/ Choisissons au hasard C points dans le disque. Plaçons C copies de l'anneau de façon que chacune soit centrée sur un point différent. Un anneau pouvant déborder du disque, nous devons prendre en compte le grand disque de rayon 16 + 3 = 19 cm, d'aire 361π cm², partageant son centre avec le disque de rayon 16 cm. Les anneaux ont une aire totale de $5C\pi$ cm². Pour qu'il soit impossible qu'aucune partie du grand disque ne se trouve sous plus de neuf copies de l'anneau, il faut que 5C soit au moins égal à 1 + (9 × 361) = 3 250, donc que C soit au moins égal à **650**.



Sur la figure, si l'une des dix copies de l'anneau est centrée sur A, alors la distance AB vaut entre 2 et 3 cm, et une autre copie de l'anneau centrée sur B couvre A. Il y a au moins neuf autres centres analogues à A. La copie de l'anneau couvre au moins dix points, la réponse est bien **650**.
B/ Soit M le nombre de membres du groupe (M ≥ 2).
S'il y a un membre qui connaît M − 1 membres, alors chacun des autres le connaît et aucun membre ne connaît personne : M − 1 et 0 ne peuvent pas être simultanément des nombres de membres connus.
Le nombre de membres connus est un entier compris entre 0 et M − 1 qui peut prendre au plus M − 1 valeurs différentes.
M > M − 1 : le principe des tiroirs nous donne le résultat.
C/ Il y a treize cases d'une couleur, disons blanches, et douze cases d'une autre, disons noires. Les treize pions posés sur les cases blanches sont poussés vers douze cases noires.
13 > 12 : il y a au moins deux de ces pions sur la même case noire.

Série de problèmes 5

A/ Supposons que le nombre de côtés maximum d'une face du polyèdre soit C, donc que le nombre de côtés d'une face du polyèdre puisse prendre au plus C − 2 valeurs de 3 à C.
En tenant compte de toutes les faces qui touchent une face dont le nombre de côtés est C, le polyèdre a au moins C + 1 faces.
C + 1 > C − 2 : le principe des tiroirs nous donne le résultat.
B/ Les parités d'un point à coordonnées entières appartiennent à quatre classes : (pair, pair), (pair, impair), (impair, pair), (impair, impair).
5 > 4 : sur les cinq points, au moins deux appartiennent à la même classe. Le milieu du segment les reliant est un point à coordonnées entières.
C/ Supposons que cela soit faux.
Joignons le centre O du disque à sept points.
Deux points ne peuvent pas être sur une même demi-droite issue de O puisque leur distance est au moins égale au rayon du disque.
Choisissons un point A, puis considérons le premier point B rencontré en tournant autour de O dans le sens des aiguilles d'une montre. Les distances OA et OB sont au plus égales au rayon du disque et la distance AB est au moins égale au rayon du disque : l'angle AOB est au moins égal à 60°.
420 > 360 : en continuant de tourner autour de O, il n'y a pas la place pour sept angles au moins égaux à 60°, d'où une contradiction.

Problème 7

Soit P le nombre de pièces d'or. P = 53K + 3.
53K + 3 – 2 doit être divisible par 19, d'où 4K – 1 et 20K – 5 (soit K – 5) sont aussi divisibles par 19.
Posons K = 19K' + 5. Alors P = 1007K' + 268 est impair ; K' = 2K'' + 1. D'où P = 2014K'' + 1275.
La première valeur supérieure à 1500 est obtenue pour K'' = 1, d'où la réponse, **3289**.