

# Jeux de société et théorie des jeux

Contrairement au bridge, qui fait partie des jeux à information incomplète puisqu'à un instant donné un joueur n'a pas une connaissance totale des jeux de ses adversaires (ni même de son partenaire), les jeux de société les plus connus sont à information complète. On fait néanmoins une distinction entre :

### Jeux à information complète et parfaite

Le joueur connaît à chaque instant l'ensemble des coups possibles de son adversaire. Lorsque l'arbre de toutes les situations de jeu déduites de la situation courante est trop important pour une étude exhaustive, on introduit des méthodes heuristiques basées sur des fonctions d'évaluation des positions du jeu. La théorie des jeux prouve l'existence d'une solution pour ce type de jeu, mais, dans la pratique, n'en donne pas la construction. Les plus classiques représentants des jeux à information complète et parfaite sont les Échecs, les Dames, le Go (voir en page 25), l'Awélé ou les Checkers (Dames anglaises).

### Jeux à information complète mais imparfaite

Il s'agit principalement de jeux dans lesquels les prises de décision des joueurs sont simultanées. Leurs stratégies optimales se présentent sous la forme d'une répartition probabiliste des coups à jouer pour une situation de jeu donnée. Ainsi, pour le jeu *Pierre/Ciseaux/Papier*, la stratégie optimale consiste à jouer aléatoirement chacune des stratégies Pierre, Ciseaux ou Papier, ce qui garantit une espérance de gain nulle.

## Le jeu d'échecs

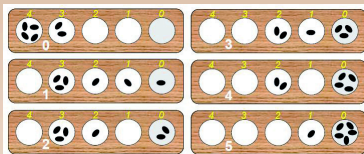
Le jeu d'échecs est incontestablement le jeu à *information complète et parfaite* le plus étudié, en particulier après l'avènement de la théorie des jeux. Depuis les premiers programmes de Claude Shannon et Alan Turing vers 1950, de nombreux algorithmes ont été réalisés autour de ses règles, tant pour son étude théorique que pour créer des programmes *heuristiques\** qui jouent. Les techniques calculatoires s'appuyant sur la théorie des jeux donnent d'excellents résultats, puisque la machine est maintenant meilleure que l'homme. Mais la combinatoire due au grand nombre de positions possibles, de l'ordre de  $10^{45}$ , fait qu'il n'est pas (encore) possible de déterminer une stratégie gagnante. On ne peut en particulier dire si le jeu d'échecs est un jeu équitable, c'est-à-dire si une partie jouée de façon optimale par les deux joueurs conduit à une partie nulle, ou à la victoire systématique des Blancs (qui jouent en premier).

\* En algorithmie, une heuristique est un algorithme qui fournit en un temps *polynomial* une solution approchée d'un problème d'optimisation difficile, de temps d'exécution *exponentiel*.

## Du Tchouka au Tchoukaillon

Inspiré par les « Mancala », nom générique de jeux de déplacement de graines dont fait partie l'awélé, Édouard Lucas (1842-1891), spécialiste de récréations mathématiques, créa une variante solitaire, le Tchouka, duquel la mathématicienne Véronique Gautheron, en 1977, imagina le Tchoukaillon. Il s'agit d'un jeu au nombre de cases indéterminé dont la première (case 0) est appelée *rouma* (maison en malaisien). Initialement (jeu 0), les cases contiennent des graines ou peuvent être vides. Le joueur prend les graines  $N(i)$  d'une case  $i$  de son choix et les sème, une par une, dans les cases en se déplaçant vers la *rouma*. La dernière graine doit atterrir dans la *rouma*. La partie est gagnée quand toutes les graines sont dans la *rouma*.

Pour un nombre  $n$  de graines, il y a une seule position gagnante ! Nous avons représenté cette position pour  $n = 6$ , ainsi que



les déplacements à effectuer (de 1 à 5) pour gagner le jeu. Il est clair que pour ne pas perdre immédiatement, la case que nous choisissons doit contenir un nombre de graine identique au rang de la case :  $N(i) = i$ . Il est démontré que la stratégie gagnante est de vider la première case de ce type que nous rencontrons en nous éloignant de la *rouma*. Pour trouver la position gagnante associée à  $n$  graines, le plus simple est d'effectuer une analyse rétrograde. Cette procédure donne toutes les positions gagnantes. De cette construction, on peut tirer une suite  $a_n$  vérifiant la relation :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{\pi} \text{ (voir Tangente HS n°41).}$$

## Le jeu de Dames en échec !

Le jeu de dames anglaises, ou Checkers, est très répandu dans le monde anglo-saxon. Les différences fondamentales avec le jeu de Dames joué en France sont d'abord la taille du damier ( $8 \times 8$ ), mais aussi l'interdiction de prise en arrière pour les pions et une limitation de déplacement pour un pion promu en Dame. Il a été résolu depuis une quinzaine d'année par le programme « Chinook ».

Le nombre de configurations possibles des pions sur un damier anglais, estimé à  $5.10^{20}$ , est trop important pour une étude exhaustive. On introduit alors des méthodes heuristiques, basées sur des fonctions d'évaluation des positions du jeu, qui fournissent, en un temps polynômial, une solution approchée de ce difficile problème d'optimisation, de temps d'exécution exponentiel. En utilisant une analyse rétrograde, qui partant des positions finales gagnantes remontent l'arbre des configurations, et une analyse prograde, qui explore, depuis le début de partie, un arbre des possibles limité par des heuristiques, après des années d'études et des mois de calcul, il a été prouvé en 2007 que les Checkers étaient un jeu équitable. Un jeu « parfait » des deux joueurs conduit inévitablement à une partie nulle. C'est le jeu le plus complexe à avoir été résolu ! Malgré tout, il n'existe pas encore de stratégie optimale valable pour toute configuration de pions en début de partie, ce qui a été obtenu en 2002 pour l'Awélé.

Pour le jeu sur un plateau  $10 \times 10$ , appelé autrefois jeu à la polonaise, puis jeu français et maintenant jeu de dames international, le nombre de positions possibles est de l'ordre de  $10^{32}$ . Les meilleurs programmes à ce jeu sont donc capables de « voir » jusqu'à un horizon bien plus élevé qu'aux Échecs et gagnent contre l'homme, sans pouvoir cependant le résoudre entièrement.