par Michel Criton

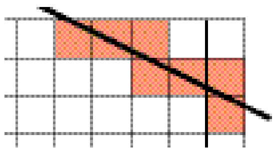
L'échiquier, terrain de jeu pour faire des maths

L'échiquier est un terrain idéal pour nombre de problèmes mathématiques récréatifs, qui, pour être le plus souvent totalement gratuits, n'en sont pas moins passionnants et permettent de mettre en œuvre de nombreux raisonnements. En voici quelques-uns.

Le jeu d'échecs a de tout temps été le prétexte à de nombreux problèmes couvrant un grand nombre de domaines relevant des mathématiques.

Dans le cadre de l'estimation des ordres de grandeur, qui n'a jamais entendu parler, par exemple, du problème des grains de blé sur l'échiquier ? Cette légende, qui est censée remonter à 3 000 ans avant J.C., est un mythe, puisque le jeu d'échecs est beaucoup plus récent (il est un dérivé du *chatrang*, jeu perse de la fin du VIe siècle), mais elle a frappé les esprits au point de se retrouver souvent dans la littérature. Elle rapporte que le roi des Indes Belkib avait promis une récompense à qui lui soumettrait un jeu qui le passionnerait. Lorsque le brahmane Sissa inventa pour l'occasion le jeu d'échecs, le roi, enthousiaste, déclara qu'il pouvait lui demander tout ce qu'il voulait. Sissa lui répondit : « *Peu de choses, Sire, un grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, et ainsi de suite pour remplir l'échiquier en doublant la quantité de grain à chaque case.* » **Lorsque le souverain donna son accord, il ne se doutait pas que les récoltes de l'année entière ne suffiraient pas. Pourquoi ?**

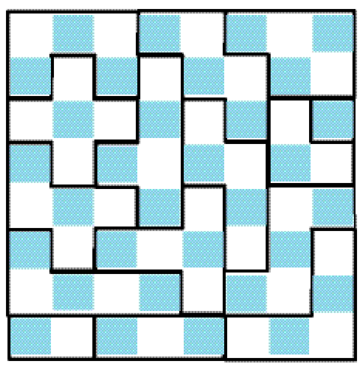
Un problème de géométrie, cette fois :
Si on trace une droite sur l'échiquier, quel est le nombre maximum de cases traversées par cette droite ? Pour qu'une case soit considérée comme étant "traversée" par une droite, il faut que l'intersection entre la case et la droite soit de longueur non nulle. À titre d'exemple, la droite tracée ci-contre traverse 7 cases.



Les découpages de l'échiquier

Parmi les problèmes liés au jeu d'échecs qui s'appuient, comme les deux précédents, sur l'échiquier lui-même, un premier type consiste à découper l'échiquier en parties non *congruentes* (non superposables).

En combien de parties toutes différentes, au maximum, peut-on découper l'échiquier
a) sans tenir compte de la couleur des cases ;
b) en tenant comte de la couleur des cases noires (bleues dans la figure) ou blanches ?



Un découpage (question a) en 15 parties non congruentes.

On peut aussi se poser la question de découper l'échiquier en un nombre minimal de carrés, le ou les plus petit(s) de ces carrés étant constitué(s) d'une seule case de l'échiquier.

Un autre type de problème consiste à découper l'échiquier est de le faire en parties congruentes (égales, éventuellement à un retournement près).

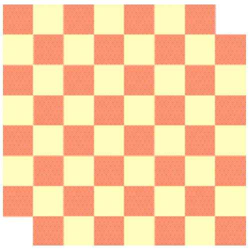
« Il y a plus d'aventures sur un échiquier que sur toutes les mers du monde. »
Pierre Mac Orlan

De combien de façons peut-on découper un échiquier 4 × 4 en deux parties congruentes ?
Même question pour un échiquier 5 × 5 privé de sa case centrale.
Trouver des découpages non triviaux d'un échiquier 8 × 8 en deux parties congruentes, en quatre parties congruentes, en huit parties congruentes...

Une dernière étude :
Peut-on découper un échiquier privé de 3*k* + 1 cases, en trois parties congruentes (avec retournement possible, et sans retournement possible) ? Si oui, quelle est la valeur minimum de *k* ? Donner des exemples de tels découpages.

Les pavages de l'échiquier

Voici maintenant quelques questions sur le pavage d'un échiquier à l'aide de polyminos.



Le problème le plus célèbre est celui de l'échiquier tronqué à deux coins opposés.
Peut-on le paver à l'aide de dominos ?

Et si les deux cases manquantes sont de couleurs opposées ?
Quelques questions sur le même thème :
Peut-on toujours paver un échiquier privé d'une case à l'aide de triminos droits ? à l'aide de triminos coudés ?

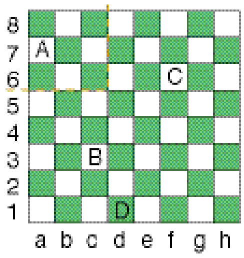
Autres questions : **peut-on paver un échiquier**
- à l'aide de quadriminos droits, carrés, en L, en T ?
- à l'aide de quadriminos obliques ?
- à l'aide de 15 quadriminos droits et d'un quadrimino carré ?
- à l'aide d'un quadrimino carré et d'une combinaison de quadriminos obliques et de quadriminos droits ?
- à l'aide des 12 pentominos et d'un quadrimino ?

Pièces sur échiquier

Le jeu d'échecs est aussi un jeu offensif, où chaque pion ou pièce a le pouvoir de menacer et de prendre les pièces adverses ! Plusieurs problèmes classiques tournent autour de ces menaces.
Pour attaquer toutes les cases non occupées de l'échiquier, combien faut-il au minimum de cavaliers, de tours, de fous, de rois, de reines ?

Pour les reines, on montre qu'il y a plusieurs solutions avec huit dames placées sans qu'aucune ne soit en prise avec une des autres. De nombreuses positions existent, mais dans toutes, une case précise de l'échiquier doit toujours être occupée : laquelle ? (question posée par Sam Loyd)

À l'aide des pièces, on peut travailler sur des problèmes de parcours. Le plus connu d'entre eux, largement évoqué par Euler, est celui du trajet d'un cavalier devant parcourir les 64 cases de l'échiquier sans jamais passer deux fois par la même case. Non seulement des solutions existent, mais il existe même des *cycles*, où la dernière case communique avec la première.



Voici d'autres problèmes de parcours assez classiques, posés par Martin Gardner, illustrés par la figure ci-contre.

- Placer une reine en A. En quatre mouvements de cette reine, traverser les neuf cases du coin supérieur gauche.
- Placer la reine en B. En quinze mouvements, passer par toutes les cases une fois et une seule, et terminer sur la case C.
- Placer la reine en D. En cinq mouvements, sans traverser deux fois la même case et sans recouper le chemin emprunté, effectuer le plus long chemin possible.
- Placer la reine dans un coin. En 14 mouvements, traverser toutes les cases en revenant au point de départ. On peut passer plusieurs fois par la même case (problème de Sam Loyd, 1867).
- Même problème sur un échiquier 7 × 7. Le chemin doit se terminer sur la case de départ, il est permis de passer plusieurs fois par la même case.

Terminons avec des problèmes où les pions, toujours posés au centre d'une case, ne joueront que le rôle de points sur un quadrillage à mailles carrées de 49 cases.
- Quel nombre maximal de pions peut-on poser sur un échiquier, sans que l'on n'ait jamais plus de 2 pions sur une ligne, une colonne ou une grande diagonale ? Et jamais plus de trois ?
- Quel nombre minimal de pions peut-on poser sur un échiquier, sans que tout nouveau pion posé provoque un alignement de trois pions en ligne, en colonne ou en diagonale ?
- Quel est le nombre maximal de pions que l'on peut poser sur un échiquier de telle sorte que les distances mutuelles de ces pions pris deux à deux soient toutes entières ?
- Quel est le nombre maximal de pions que l'on peut poser sur un échiquier de 64 cases, de telle sorte que les distances mutuelles de ces pions pris deux à deux soient toutes différentes ?

Trouvez des dispositions de ces pions.

M.C.

Références
- *Martin GARDNER : Jeux mathématiques du Scientific American, éditions CEDIC.*
- *Jouer Jeux Mathématiques n° 19, FFJM, 1996*
- *Bibliothèque Tangente n° 20, Éditions Pole, 2004*
- *http://www.ffjm.org/upload /fichiers/N_NON_DOMI - NATING_QUEENS.pdf*