par F. Aoustin et R. Künstler

Coopération Maths–Philo
Un match en trois rounds

La connaissance mathématique est-elle possible ?
Tel est le thème de séances communes de mathématiques et philosophie proposées à des élèves de terminale S du lycée Condorcet de Saint-Quentin (Aisne). Une occasion de tirer le meilleur de l'interdisciplinarité, aussi bien pour les élèves que pour les professeurs.

Animant conjointement trois séances en présence des élèves, deux enseignants de lycée ont décidé de traiter ensemble la question de la *connaissance mathématique*, en déployant la réflexion en trois temps ressemblant fort aux rounds d'un match.

Le professeur de mathématiques a joué dans un premier temps le rôle du défenseur de sa discipline, pressé par le professeur de philosophie qui jouait celui du sceptique, ne cessant de questionner la valeur de la discipline enseignée par son collègue. Les élèves sont piqués au vif : n'auraient-ils pas jusqu'à présent accepté les énoncés mathématiques simplement parce qu'ils ont aveuglément cru ce que leur disaient leurs professeurs ?

Premier round : avantage philo

Le professeur de philosophie rappelle les définitions des notions de connaissance (voir ci-contre), de justification épistémique et de vérité. Il pose la question de savoir si les mathématiques sont vraiment une connaissance.

Première approche : pour justifier une proposition mathématique, il suffit de vérifier sur quelques cas si elle est vraie. Deux problèmes, qui sont autant d'expériences philosophiques, sont alors proposés aux élèves (encadré page suivante). Dans les deux situations, en considérant quelques cas, des conjectures sont émises. Mais, tandis qu'il est aisé de trouver un contre-exemple à la deuxième, la première n'en a pas. La vérification exhaustive ne permet pas de justifier les propositions mathématiques. Le professeur de philosophie précise alors qu'il semble vain de justifier de telles propositions puisqu'elles portent sur une infinité de cas et que même si tous les humains passaient toutes leurs vies durant des millions de générations pour vérifier un théorème, ils n'y parviendraient pas. Il conclut donc que les mathématiques ne sont pas une connaissance.

Qu'est-ce que la connaissance ?

Le concept de connaissance est traditionnellement défini comme croyance à la fois *vraie* et *justifiée*. Pour qu'une proposition à laquelle on croit soit une connaissance, il ne suffit donc pas d'être convaincu qu'elle est vraie. Il faut en plus que la croyance repose sur de bonnes raisons, c'est-à-dire soit *justifiée*.
Par exemple, si quelqu'un pense que le boson de Higgs existe parce que sa voyante le lui a dit, il a une croyance vraie, mais pour de mauvaises raisons.

Cette notion s'applique-t-elle à la connaissance mathématique ?
En mathématiques, une conjecture est une proposition qui peut être vraie ou fausse. Mais quand bien même elle serait vraie, elle ne serait pas encore une connaissance si elle n'était pas justifiée.
Mais comme le contenu d'une proposition se réfère le plus souvent à une infinité de cas, non seulement actuels mais possibles, ni la vérification expérimentale, ni l'induction ne peuvent la justifier. D'où l'idée selon laquelle la connaissance mathématique doit être justifiée par la *démonstration*.
Mieux ! La croyance en une proposition mathématique ne devrait en principe résulter que de la démonstration.

Deuxième round : avantage maths

Mais non ! Le professeur de mathématiques établit avec les élèves que la conjecture portant sur les ensembles peut être démontrée par récurrence. Ainsi, la connaissance mathématique est non pas perceptive, mais démonstrative.

Pas si vite ! Comment sait-on que le raisonnement par récurrence est fiable ? Cela a-t-il été démontré ? Il semble que la démonstration mathématique soit exposée au trilemme d'Agrippa : toute entreprise de justification est soit vouée à régresser infiniment, soit à s'arrêter par une pétition de principe, soit à tourner en rond.
Il s'en suit une présentation de la démarche axiomatique chez Euclide où l'on montre comment cette démarche sort du trilemme.
Le concept euclidien d'axiome rompt avec le présupposé qui génère le trilemme sceptique : toute proposition n'a pas besoin de s'appuyer sur une autre proposition pour devenir une connaissance, car concevoir le sens de certaines propositions suffit à voir que celles-ci ne peuvent pas être fausses.

Au terme de ce premier moment, la réponse à la question est donc que la connaissance mathématique est possible, et qu'elle ne s'appuie ni sur la vérification, ni sur la simple démonstration, mais sur la démonstration étayée par des axiomes.
Le professeur de mathématiques a donc triomphé du scepticisme de son collègue.

Coup de théâtre !

Mais voilà, le professeur de mathématiques révèle alors que les mathématiciens eux-mêmes ont détruit le concept d'axiome : ils ont construit des géométries qui ne respectent pas toute l'axiomatique euclidienne. Après un exposé simplifié de deux de ces géométries non-euclidiennes (sphérique et hyperbolique), les enseignants concluent, dépités, que les mathématiques ont été transformées en simple jeu de construction et les axiomes en pur outil formel.

Dans un troisième temps, c'est l'enseignant de philosophie qui vient consoler son collègue : la conclusion constructiviste n'est pas la seule que l'on puisse tirer des géométries non-euclidiennes. Historiquement, d'ailleurs, les mathématiciens-philosophes ont eux-mêmes cherché comment sauver la connaissance mathématique ! Trois voies sont explorées : le formalisme de Hilbert, le conventionnalisme motivé de Poincaré et le logicisme de Russell et Whitehead.

Séance interdisciplinaire au lycée Condorcet.

Les séances, s'apparentant à un match de boxe intellectuel, ont été profitables autant aux élèves, qui ont compris pourquoi les grands mathématiciens étaient aussi philosophes, qu'aux professeurs. Le philosophe a pu aborder une notion difficile, celle de la démonstration, à travers une démarche authentiquement réflexive et dialectique. Les exemples choisis par son collègue permettaient à chaque fois de poser de nouveau la question sceptique : « *Et comment sait-on cela ?* » jusqu'au moment de la (temporaire) satisfaction. Pour le mathématicien, cela a été l'occasion de donner du sens à l'exigence de démonstration en mathématiques.

F.A. & R.K.

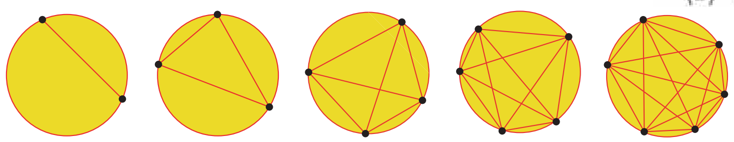
Les deux situations proposées aux élèves

Première situation

Soit un ensemble fini de n éléments.
Combien admet-il de sous-ensembles distincts ?
En analysant les cas particuliers des petites valeurs de n (de 0 à 4), on conjecture rapidement que l'ensemble admet 2^n sous-ensembles distincts. Ce résultat classique se démontre par récurrence, en considérant les sous-ensembles qui contiennent l'élément de plus et ceux qui ne le contiennent pas.

Deuxième situation

Quel est le nombre maximal de régions d'un cercle délimitées par les diagonales et les côtés d'un polygone dont les n sommets sont inscrits dans le cercle ?
Là aussi, on analyse facilement les premiers cas à la main. On obtient 2 régions pour $n = 2$, 4 pour $n = 3$, 8 pour $n = 4$,16 pour $n = 5$. La tentation est grande de proposer 2^{n-1} régions pour n sommets, mais il n'en est rien ! Pour les curieux, le résultat est en fait donné par la formule $1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$.



2 régions *4 régions* *8 régions* *16 régions* *31 régions*