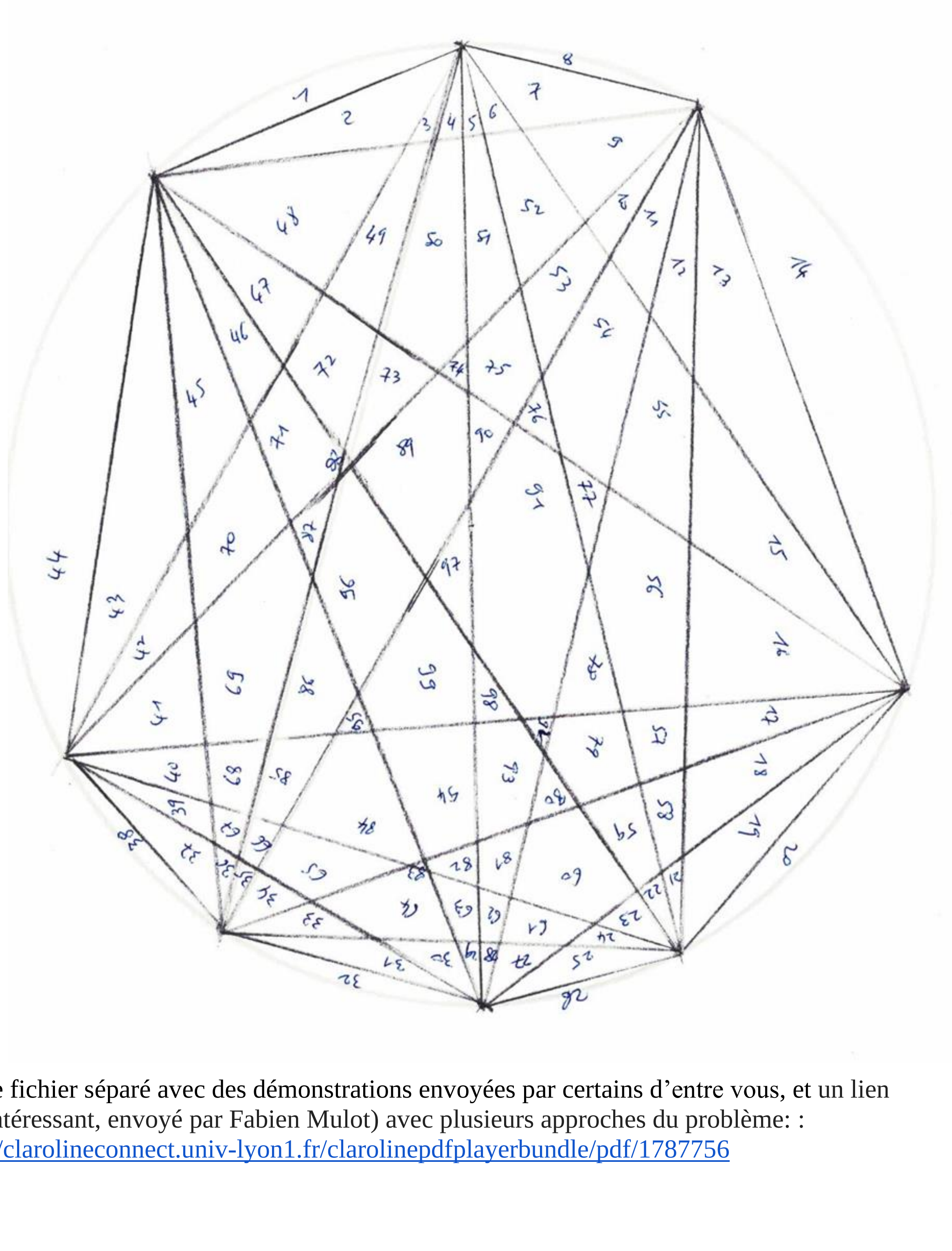
SOLUTIONS

Série 2, jeu du matheux confiné 3e vague, Dominique SOUDER

Exercice 1 : Vacances régionales

Non, le nombre de régions ne suit pas automatiquement les puissances de 2.
Pour 6 points on obtient 31 régions (et non 32), et pour 7 points 57 régions (et non 64).
Pour 8 points la réponse est : 99.

Si n est le nombre de points, il y a une formule donnant le nombre de régions c'est : (1/24) $(n^4-6n^3+23n^2-18n+24)$.



Voir le fichier séparé avec des démonstrations envoyées par certains d'entre vous, et un lien (trés intéressant, envoyé par Fabien Mulot) avec plusieurs approches du problème: :
https://clarolineconnect.univ-lyon1.fr/clarolinepdfplayerbundle/pdf/1787756

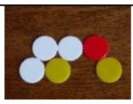
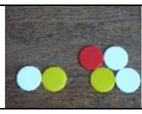
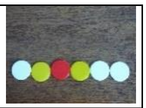
Exercice 2 : Le journal intime du confiné

Soit **n** le nombre de pages et **k** le numéro de la page de gauche choisie.
On a **n** pair (2 numéros par page), et **k** pair (à gauche).
$1013{,}8 = [(1+2+3+\ldots+(n-1)+ n) - k] / (n-1) = [(1+2+3+\ldots+(n-1)) + (n - k)]/(n-1)$
$= [(1+2+3+\ldots+(n-1)]/(n-1) + (n-k)/(n-1)$
$= [(n-1)(n)/2]/(n-1) + (n - k)/(n-1) = (n/2) + (n-k)/(n-1)$. Mais comme n est pair on a $(n /2)$ qui est entier, et comme : $n-k < n-1$ on a $(n-k)/(n-1)$ qui est compris entre 0 et 1(exclus).
On obtient : $n /2 = 1013$ et $+ (n-k)/(n-1) = 0{,}8$.
D'où $n = 2x1013 = 2026$, et $2026 - k = (0{,}8)(2025)$ d'où $k = 2026 - 1620 = 406$.
Le couple cherché est : **(2026 ; 406).**

On peut vérifier que le nombre de pages numérotées est pair et que la page de gauche est paire.

Exercice 3 : En rang, je n'veux voir qu'une seule tête !

Il faut au minimum **7 coups**. Voici les étapes vers l'alignement des 6 pions :

								
Départ	1	2	3		4	5	6	7 : arrivée

(à noter que les pions jaunes ne bougent jamais dans l'opération, les pions blancs bougent en premier, et le rouge seulement à la fin vers le 5 et le 7)

Exercice 4 : Le théorème du confiné

La recette du magicien pour réussir est la suivante : il calcule (papier crayon), au fur et à mesure que le spectateur lui annonce les restes, la somme **(3636a + 1920b + 505c).**

Ensuite il divise par 2020, et retient le reste de cette division : **c'est le nombre « n ».**

Explication :

Par analogie au théorème chinois que beaucoup de matheux connaissent,
on commence par calculer **5x101x4 = 2020.**

On cherche une expression de forme : (Ka + K'b + K''c) / 2020 avec :

- K parmi les multiples de 4 x 101 donc de 404, soit 404k
- K' parmi les multiples de 5 x 4 donc de 20, soit 20k'
- K'' parmi les multiples de 101 x 5 donc de 505, soit 505k''.

Finalement vous cherchez des nombres k, k', k'' et vous vous intéressez à :

(404ka + 20k'b + 505k''c)/2020, et vous voulez que (404k + 20k' + 505k'') soit égal à 2021 ou $[(2020 \times 2) + 1) = 4041$ ou $[(2020 \times 3) + 1] = 6061$, etc.

En essayant de mélanger (additionner) trois nombres, c'est à dire en prenant un nombre dans chacune des trois colonnes suivantes…

404	20	505
808	40	1010
1212	60	1515
1616	80	2020
2020	100	2525
2424	120	3030
2828	140	3535
3232	160	4040
3636	180	4545
4040	200	5050
4444	220	5555
…	…	…

On gagne du temps en remarquant que le total (2021 ou 4041, ou 6061…) doit finir par 1 qui est impair, alors que les 2 colonnes de gauche sont formées de nombres pairs.

Il faut donc utiliser dans la colonne de droite un nombre finissant par 5. Comme dans la 2^{e} colonne chaque nombre finit par 0, il faut prendre dans la colonne de gauche un nombre finissant par 6.

… On aboutit à 1616 + 1920 + 505 = 4041,

et à la fraction miracle **(1616a + 1920b + 505c) / 2020.**

En résumé : Le nombre n (avec 1≤ n < 2020) est congru à (1616a + 1920b + 505c) modulo 2020, et le tour consiste à retrouver n à partir du résultat du grand nombre N = (1616a + 1920b + 505c) calculé à partir des indications a, b, c données par le spectateur.

Cas particulier : si n = 2020 d'où a=b=c=0, on aboutit à N=0 mais le magicien doit l'interpréter comme le choix du nombre 2020 puisqu'en congruence modulo 2020 le 0 et 2020 c'est la même chose.

Voici enfin la justification :

(1616a + 1920b + 505c) / 2020 =
[1616(n – 5q) + 1920(n – 101q') + 505(n – 4q'')] / 2020 =
= [4041n – 18180q – 193920q' – 2020q''] / 2020
= [4040n + n] / 2020 – 9q – 96q' – q''
= 2n – 9q – 96q' – q'' + (n / 2020).

Comme (2n – 9q – 96q' – q'') est un entier, et comme (n / 2020) est inférieur strictement à 1 puisque quand n < 2020, on comprend que n est le reste de la division du nombre
(1616a + 1920b + 505c) par 2020.

Dans le cas n = 2020 = 5x101x4 on a vu a=b=c=0 donc N = 0 à interpréter en n = 2020.

Exemple : le spectateur a choisi n = 1950 :

Il calcule a = 0, b = 31, c = 2, puis le magicien calcule :

(1616a + 1920b + 505c) = 0 + 59520 + 1010 = 60530 ;

comme 60530= 2020 × 29 + 1950, le reste **1950** est le nombre de départ.

En résumé des réponses :

Ex : 1950 ; puis (2020 ; 1616 ; 1920 ; 505).

Exercice 5 : Je confine mes prunes chez moi

Soient HKL les points de contact (tangence) du cercle inscrit avec les côtés AB, AC, BC. Le quadrilatère AHIK a 3 angles droits donc est un rectangle, mais de plus les tangentes AH et AK sont égales, donc c'est un carré de côté le rayon r du cercle inscrit.

Soit BH = BL = x et CL = CK = y. On a $x^2 + r^2 = 13$ et $y^2 + r^2 = 104$, d'où

$$x = \sqrt{(13 - r^2)} \text{ et } y = \sqrt{(104 - r^2)}$$

Le théorème de Pythagore donne $(x+y)^2 = (x+r)^2 + (y+r)^2$ qui se simplifie en

$$xy = r^2 + r(x + y) \qquad \text{(relation 1)}$$

Les bissectrices BI et CI sont des axes de symétrie des figures BHIL et CLIK.

L'angle BIC vaut la moitié de LIH +LIK soit 1/2(360 - 90) = 1/2(270) = 135°.

On sait que sin 135° = sin 45° = $\sqrt{2}/2$.

L'aire du triangle BIC est égale à BI x IC x sin BIC = $\sqrt{13} \text{x} \sqrt{104} \text{x} \sqrt{2}/2 = 26$

Mais on a aussi aire de BIC = BC x LI = (x + y)(r)

donc r(x +y) = 26 (relation 2)

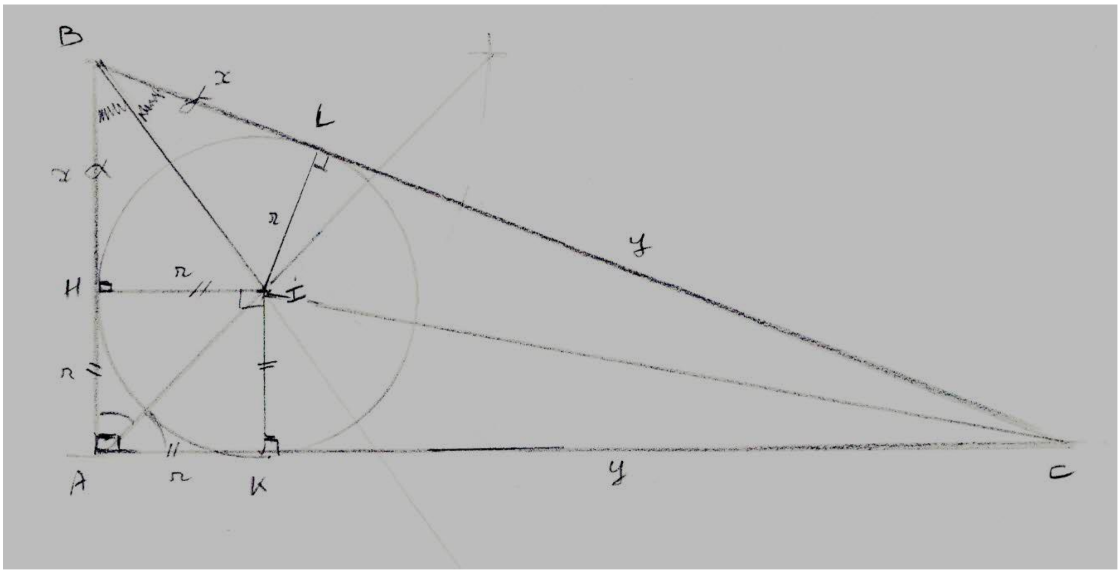
En mélangeant les relations 1 et 2, on obtient $xy = r^2 + 26$

d'où $\sqrt{(13 - r^2)}\ \sqrt{(104 - r^2)} = r^2 + 26$ qu'on élève au carré...

$r^4 - 117r^2 + 1352 = r^4 + 676 + 52r^2$ puis $169r^2 = 676$

d'où $r^2 = 4$ et r = 2.

Les prunes sont chez le voisin au-delà de 2 mètres de rayon. La réponse cherchée, en centimètres est donc : **200.**



(à noter les dimensions du triangle x = 3, y = 10 donc AB = 5 et AC = 12 et BC = 13 mètres).