SOLUTIONS série 3 : Jeu du matheux confiné 3^{e} vague,

Dominique Souder

Exercice 1 : Les cartes confinées dans le tableau

Ce tour utilise les propriétés des translations de vecteurs dans une base orthonormée ($\vec{i}$; $\vec{j}$).

Ici, on peut considérer qu'une carte qui vaut « x de trèfle » fait faire une translation de vecteur (-x $\vec{i}$) ; une carte valant « x de carreau » fait faire une translation de vecteur (x $\vec{i}$) ; une carte valant « y de pique » fait faire une translation de vecteur (y $\vec{j}$) ; une carte valant « y de cœur » fait faire une translation de vecteur (-y $\vec{j}$).

L'addition des vecteurs vérifie des propriétés de commutativité, associativité, et la relation de Chasles. L'ordre des 8 translations successives ne change rien au bilan global qui fait passer de la case de départ à la case d'arrivée par la même translation.

Pour la question a) c'est : K2, K6, T1, T9, P4, P5, C2, C6.

Ce qui donne : $2\vec{i} +6\vec{i} -1\vec{i} -9\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{j} - 2\vec{j} - 6\vec{j} = -2\vec{i} + 1\vec{j}$.

Le tableau a été conçu pour qu'à partir de chacune des 4 cases « 4 de trèfle » la translation de vecteur ($-2\vec{i} + 1\vec{j}$) donne une case de valeur **« 2 de carreau ».**

Pour la question b) c'est : K2, K6, T1, T5, P2, P5, C2, C6.

Ce qui donne $2\vec{i} +6\vec{i} -1\vec{i} -5\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{j} - 2\vec{j} - 6\vec{j} = 2\vec{i} - 1\vec{j}$.

Le tableau a été conçu pour qu'à partir de chacune des 4 cases « 9 de cœur » la translation de vecteur ($2\vec{i} - 1\vec{j}$) donne une case de valeur « 7 de trèfle ».

Si on fait le trajet inverse à partir du « 7 de trèfle » il faut considérer la translation de vecteur opposé soit ($-2\vec{i} + 1\vec{j}$). A partir des 4 cases « 7 de trèfle » on revient aux 4 cases **« 9 de cœur ».**

Pour la question c) il faut considérer une translation de vecteur nul.

Avec les 6 cartes connues : K3, K6, T2, P3, P5, C2, le déplacement partiel donne :

$3\vec{i} +6\vec{i} -2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{j} - 2\vec{j} = 7\vec{i} + 6\vec{j}$.

Pour obtenir, avec les deux cartes manquantes, le vecteur nul, il faut envisager une translation de vecteur $-7\vec{i} - 6\vec{j}$.

Il manque donc **un 7 de trèfle et un 6 de cœur**.

Exercice 2 : Le confinement du 39 (histoire vraie)

A deux chiffres : « 39 » soit 1 cas

A trois chiffres : pour « c39 » avec c de 1 à 9, et pour « 39u » avec u de 0 à 9 cela fait 9+10=19 cas.

A quatre chiffres : pour « mc39 » avec m de 1 à 9 et c de 0 à 9 il y a 9x10 = 90 cas (y compris l'horreur absolue qu'est l'écriture « 3939 »);

pour « m39u » avec m de 1 à 9 et u de 0 à 9 il y a 9x10 = 90 cas ;

pour « 39du » avec d de 0 à 9 et u de 0 à 9 il y a 10x10 = 100 cas, dont l'écriture « 3939 » qui a été déjà comptabilisée précédemment, ce qui ramène à 100-1 = 99 nouveaux cas

Le total pour quatre chiffres est 90+90+99= 279 cas.

Le total pour les nombres supprimés entre 1 et 9999 est 1+19+279 = **299 cas**.

- Combien de numéros à cinq chiffres sont-ils supprimés (parmi les nombres de 10 000 à 99999) ?

- Pour « Dmc39 » avec D de 1 à 9, m de 0 à 9, c de 0 à 9 il y a 9x10x10 = 900 cas
- Pour « Dm39u » avec D de 1 à 9, m de 0 à 9, u de 0 à 9 il y a 9x10x10 = 900 cas
- Pour « D39du » avec D de 1 à 9, d de 0 à 9, u de 0 à 9 il y a 9x10x10 = 900 cas mais il faut éliminer le cas D3939 déjà compté dans la structure Dmc39, ceci pour D de 1 à 9 donc on se réduit de 9 cas et on tombe à 900-9 = 891 cas.
- Pour « 39cdu » avec c de 0 à 9, d de 0 à 9, u de 0 à 9 il y a 10x10x10 = 1000 cas, mais il faut éliminer d'abord le cas 3939u déjà compté dans la structure Dm39u, ceci pour u de 0 à 9 d'où une réduction de 10 cas ; et il faut éliminer aussi le cas 39c39 déjà compté dans la structure Dmc39, ceci pour c de 0 à 9 d'où une réduction de 10 autres cas. On tombe à 1000-20 = 980 cas.
- Conclusion pour cinq chiffres : 900+900+891+980 = 3671 cas.

Au final pour les nombres de 1 à 99 999 : il y a 299+3671 = **3970 nombres éliminés.**

Exercice 3 : Street-art à la gare

Les triangles AMB, BMC, CMD ont la même hauteur, comparer leurs aires revient à comparer leurs bases AB, BC, CD, donc les nombres 5, 10, 50.

D'autre part aire AMB = ½ x MA x MB x sin AMB

et aire BMC = ½ x MB x MC x sin BMC.

Comme les angles en M sont égaux, leurs sinus aussi, et on obtient après simplification le rapport :

(aire BMC) / (aire AMB) = MC/ MA = 2 ce qui est équivalent à $MC^2 = 4MA^2$.

Ceci est l'équation d'un cercle.

Dans le repère où A(0,0), B(5,0), C(15,0), D(65,0) avec M (x ;y) c'est : $(x-15)^2 + y^2 = 4(x^2 + y^2)$ d'où $x^2+y^2 +10x = 75$.

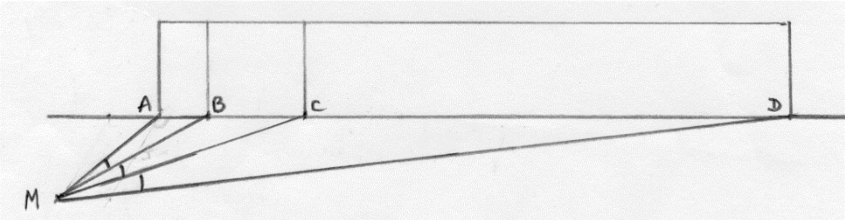
De même (aire CMD) / (aire BMC) = MD / MB = 10/2 = 5 ce qui est équivalent à

$MD^2 = 25\ MB^2$. On obtient le cercle d'équation $(x - 65)^2 + y^2 = 25\ [(x - 5)^2 + y^2]$

soit, en simplifiant $x^2 + y^2 - 5x = 150$.

L'intersection des deux cercles donne le point M cherché.

$x^2 + y^2 + 10x = 75$ et $x^2 + y^2 - 5x = 150$ donnent :



$75-10x = 150+5x$ puis $15x = -75$ et $x = -5$.

$y^2 = 75 - 10x - x^2$ donne $y^2 = 100$ et $y = 10$ dans le repère proposé.

Le point M doit avoir pour **coordonnées (-5 ; 10).**

<u>Exercice 4 :</u> Le jeu des nombres croisés de Jacques KELLER

Il y avait 8 solutions :

(en blanc = chiffres toujours inchangés en jaune = chiffres parfois différents)

2	4	3	1	5		1	3	2	4
1	3	2		1	2	5	4	3	6
	2	1	5	3	8	6	7	4	9
2	1		3	2	5	4	6	1	7
3	5	2	7	4	6	8	1		1
1		4	1	6	7	2	5	3	8
4	3	1	2		1	3	2	4	5
5	2	3	6	1	4	7		1	2
6	1	5	4	2	3		1	2	3
7	4	6	8	3	9	1	2	5	

2	4	3	1	5		1	3	2	4
1	3	2		3	2	5	1	4	6
	2	1	5	4	8	6	7	3	9
2	1		3	2	5	4	6	1	7
3	5	2	7	1	6	8	4		1
1		4	1	6	7	2	5	3	8
4	3	1	2		1	3	2	4	5
5	2	3	6	1	4	7		1	2
6	1	5	4	2	3		1	2	3
7	4	6	8	3	9	1	2	5	

2	4	3	1	5		1	3	2	4
1	3	2		4	2	5	1	3	6
	2	1	5	3	8	6	7	4	9
2	1		3	2	5	4	6	1	7
3	5	2	7	1	6	8	4		1
1		4	1	6	7	2	5	3	8
4	3	1	2		1	3	2	4	5
5	2	3	6	1	4	7		1	2
6	1	5	4	2	3		1	2	3
7	4	6	8	3	9	1	2	5	

2	5	3	1	4		1	3	2	4
1	3	2		1	2	5	4	3	6
	2	1	5	3	8	6	7	4	9
2	1		3	2	5	4	6	1	7
3	4	2	7	5	6	8	1		1
1		4	1	6	7	2	5	3	8
4	3	1	2		1	3	2	4	5
5	2	3	6	1	4	7		1	2
6	1	5	4	2	3		1	2	3
7	4	6	8	3	9	1	2	5	

2	5	3	1	4		1	3	2	4
1	3	2		3	2	5	1	4	6
	2	1	7	5	8	6	4	3	9
2	1		3	2	5	4	6	1	7
3	4	2	5	1	6	8	7		1
1		4	1	6	7	2	5	3	8
4	3	1	2		1	3	2	4	5
5	2	3	6	1	4	7		1	2
6	1	5	4	2	3		1	2	3
7	4	6	8	3	9	1	2	5	

2	5	3	1	4		1	3	2	4
1	3	2		3	2	5	4	1	6
	2	1	7	5	8	4	6	3	9
2	1		3	2	5	6	1	4	7
3	4	2	5	1	6	8	7		1
1		4	1	6	7	2	5	3	8
4	3	1	2		1	3	2	4	5
5	2	3	6	1	4	7		1	2
6	1	5	4	2	3		1	2	3
7	4	6	8	3	9	1	2	5	

2	5	3	1	4		1	3	2	4
1	3	2		3	2	5	1	4	6
	2	1	7	5	8	4	6	3	9
2	1		3	2	5	6	4	1	7
3	4	2	5	1	6	8	7		1
1		4	1	6	7	2	5	3	8
4	3	1	2		1	3	2	4	5
5	2	3	6	1	4	7		1	2
6	1	5	4	2	3		1	2	3
7	4	6	8	3	9	1	2	5	

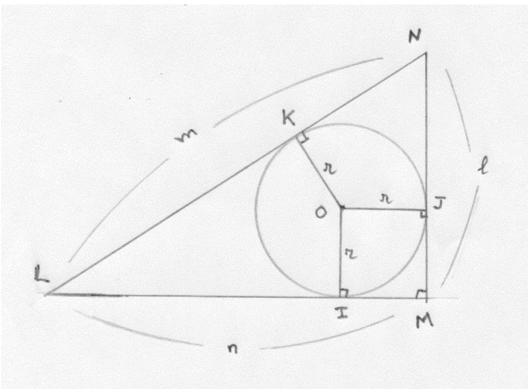
2	5	3	1	4		1	3	2	4
1	3	2		5	2	4	1	3	6
	2	1	7	3	8	5	6	4	9
2	1		3	2	5	6	4	1	7
3	4	2	5	1	6	8	7		1
1		4	1	6	7	2	5	3	8
4	3	1	2		1	3	2	4	5
5	2	3	6	1	4	7		1	2
6	1	5	4	2	3		1	2	3
7	4	6	8	3	9	1	2	5	

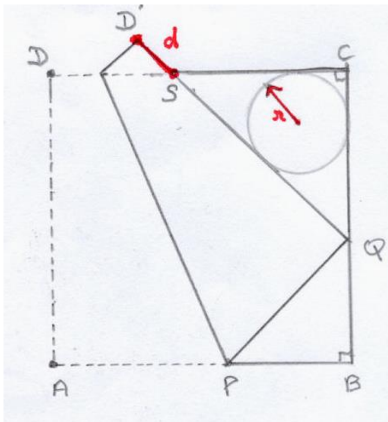
Merci à Frank Zimmer pour ce tableau complet.

<u>Exercice 5.</u> Origami et Sangaku : « le cercle inscrit confiné »

<u>Aide éventuelle… Question 1)</u> (demandée par quelques personnes)

1°) Dans un triangle LMN rectangle en M, dont les côtés mesurent *l, m, n* et dont le cercle inscrit de centre O a pour rayon *r* (voir figure ci-dessous), montrer que $r = \frac{l+n-m}{2}$. On admettra, en considérant à partir du point L les deux tangentes en I et K au cercle, que les deux segments LI et LK ont la même longueur, et on admettra les propriétés de même type à partir des points M et N.





2°) Revenons à la feuille carrée de côté 1, et à la figure ci-dessus à droite. On imagine d'abord que le point Q est au milieu de [BC].

a) Exprimer la longueur PB en fonction de AP. Sachant que PQ = AP, calculer la longueur AP grâce au théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle PBQ. En déduire la mesure de la longueur PB.
b) Montrer que les triangles PBQ et QCS sont semblables.
c) Calculer les longueurs SQ, CS.
d) Poursuivre les calculs nécessaires pour montrer que d = r dans ce cas de figure.

<u>Solution :</u>

1) Le quadrilatère MJOI a 3 angles droits, c'est donc un rectangle. Comme deux côtés consécutifs sont égaux à *r*, c'est finalement un carré de côté *r*.

A partir de L on a LI = LK = $(n-r)$, à partir de N on a NJ = NK= $(l-r)$.

L'hypoténuse mesure donc à la fois *m* et $(n-r) + (l-r)$ d'où $m = l+n-2r$ puis $2r = l + n-m$ et $r = \frac{l+n-m}{2}$.

2°) a) PB = 1 – AP et PQ = AP.

Théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle PBQ :

$PQ^2 = PB^2 + BQ^2$ d'où $AP^2 = (1-AP)^2 + (1/2)^2$

On simplifie : 0 = 1 – 2AP + ¼ puis 2AP = 5/4 et AP = 5/8.

On en déduit : PQ = 5/8 et PB = 1 – 5/8 = 3/8.

b) Les deux triangles sont rectangles. On remarque que l'angle PQS est un angle droit de la feuille. On peut montrer que les angles PQB et CSQ sont égaux à cause de leurs côtés 2 à 2 perpendiculaires, ou utiliser des considérations d'angles égaux parce qu'ils ont le même supplémentaire. On obtient que les triangles PBQ et CSQ ont deux angles égaux 2 à 2 donc ils sont semblables.

c) On en déduit que les côtés des 2 triangles sont proportionnels : $\frac{PQ}{QS}=\frac{PB}{CQ}=\frac{BQ}{CS}$.

Comme PB = 3/8 et CQ = ½ le rapport ci-dessus de similitude vaut (3/8)/(1/2) = ¾ ou dans l'autre sens il vaut 4/3.

On obtient CS = (4/3) BQ = (4/3) × (1/2) = 2/3 ; et QS = (4/3) PQ = (4/3) × ((5/8) = 5/6.

d) En utilisant la formule du 1°) le rayon vaut r = (2/3+1/2–5/6)/2 = (4+3–5)/12 = 2/12 = 1/6.

D'autre part d = D'Q – QS = 1 – 5/6 = 1/6.

On vérifie ici que d = r = 1/6.

Aide éventuelle… Question 2)

a) On note x la longueur AP. Montrer que x = $\frac{1}{2}\times\frac{1+k^2}{k^2}$
b) En déduire PB en fonction de k.
c) Calculer en fonction de k les mesures CS et SQ.
d) Calculer en fonction de k les mesures d et r. Conclure sur le problème posé.

Solution :

a) Si AP = x alors PB = 1–x et PQ = x.

Théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle PBQ :

$PQ^2 = PB^2 + BQ^2$ d'où $x^2 = (1 - x)^2 + (1/k)^2$.

On simplifie : $0 = 1 - 2x + 1/k^2$ et $2x = 1 + 1/k^2$ soit $x = \frac{1}{2}\times\frac{1+k^2}{k^2}$

b) On obtient PB = $1 - \frac{1}{2}\times\frac{1+k^2}{k^2} = \frac{k^2-1}{2k^2}$.

c) Les triangles PBQ et CSQ sont semblables comme au 2°).

BQ = 1/k, CQ = 1 – BQ = 1– 1/k = $\frac{k-1}{k}$.

Le rapport de similitude est PB/CQ = $\frac{k^2-1}{2k^2}\times\frac{k}{k-1}=\frac{(k+1)(k-1)}{2k(k-1)}=\frac{k+1}{2k}$.

On obtient CS = $\frac{2k}{k+1}\times$ BQ = $\frac{2k}{k+1}\times\frac{1}{k}=\frac{2}{k+1}$.

D'autre part QS = $\frac{2k}{k+1} \times$ PQ = $\frac{2k}{k+1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1+k^2}{k^2} = \frac{1+k^2}{k(k+1)}$.

d) Le rayon r vaut $\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k} - \frac{1+k^2}{k(k+1)}\right) =$

$$\frac{1}{2} \times \frac{2k+k^2-1-1-k^2}{k(k+1)} = \frac{1}{2} \times \frac{2k-2}{k(k+1)} = \frac{k-1}{k(k+1)}.$$

Le « débord » vaut d = 1– SQ = 1– $\frac{1+k^2}{k(k+1)} = \frac{k^2+k-1-k^2}{k(k+1)} = \frac{k-1}{k(k+1)}$.

On constate donc que **dans tous les cas de figure** (soit pour toute position de Q sur [BC]) on obtient **d = r.**

Bibliographie :

« Sangaku : le mystère des énigmes géométriques japonaises »,

par Géry Huvent, éditions Dunod 2008.