SOLUTIONS

Série 4, jeu du matheux confiné 3^e vague, Dominique SOUDER

Exercice 1 : Le rayon confiné dans les 2022 côtés

L'angle au centre correspondant à un côté du polygone vaut 360°/ 2022. Un angle inscrit interceptant un des côtés vaut 180°/2022.

Le nombre d'angles inscrits nécessaires pour faire 60 degrés est 60 / (180 / 2022) = 674.

Le côté rencontré après l'envoi du rayon depuis le côté 1 est 674 + 1 = 675 (c'est le 1er rebond). Ensuite c'est 675 + 674 = 1349 (c'est le 2^e rebond), puis 1349 +674 = 2023 ce qui correspond au côté 1 puisque 2022+1 = 2023 (c'est le 3^e rebond).

Le rayon ne rencontre que trois côtés : 1, 675, 1349, 1, 675, 1349… Sur le côté 1 se font les rebonds de numéros divisibles par 3, donc le 2022^e rebond se fait sur le côté 1 (car 2022 est divisible par 3).

Exercice 2 : Le « picon citron curaçao »

a) Soit x le volume de curaçao (et donc aussi de citron, et de picon). La contenance du verre est 3x. Soit y le volume d'eau versée dans le second verre. Dans le second verre on obtient d'abord les volumes suivants : y d'eau, et (3x-y)/3 pour chacun des trois autres ingrédients. Dans le premier verre il reste en volume de curaçao : x - (3x-y)/3 soit (y/3), de même pour le citron et le picon, et ce premier verre est maintenant occupé par un volume égal à y.

Pour compléter ce premier verre il faut mettre un volume égal à (3x-y), qui va être versé avec 4 composantes « picon citron curaçao eau » proportionnellement aux nombres (3x-y)/3, (3x-y)/3, (3x-y)/3, (y).
Le volume d'eau du second verre devient donc (3x-y)(y/3x).
Le volume de picon ou citron ou curaçao devient :
$(y/3) + [(3x-y)(3x-y)/3]/3x$ soit $(y/3) + (3x-y)^2/(9x)$.
Les volumes d'eau et de picon doivent alors être égaux d'où :
$(3x-y)(y/3x) = (y/3) + (3x-y)^2/(9x)$.
On obtient : $(3x-y)^2 +3xy = 3y(3x-y)$.
Ceci se simplifie en $9x^2+4y^2-12xy = 0$.
On reconnaît $(3x-2y)^2 = 0$ d'où $3x = 2y$ et $y = (3/2)x$.
Comme au départ on avait pour x un tiers du verre, alors pour y on a :
(3/2)(1/3) = (1/2) du verre.
Il faut emplir le second verre à moitié d'eau seule.

On peut vérifier :
Avec 100 unités de volume pour le picon et autant pour le citron, et pour le curaçao, soit 300 unités pour un verre, on verse dans le second verre d'abord 150 unités d'eau seule. On complète avec 50 unités de citron, autant de picon et autant de curaçao. Il reste donc dans le premier verre 50 unités de citron, autant de picon et autant de curaçao. On doit verser 150

unités pour le compléter, et dans ce complément l'eau sera présente à moitié soit 75 unités. Le reste soit 300-75 = 225 est équitablement occupé par les 3 autres ingrédients soit 225/3 = 75 unités pour chaque. Les 4 ingrédients sont présents à égalité pour 75 unités.

b) Si Marius verse dans le second verre **un quart de la contenance** en eau, alors il reste trois quarts à remplir équitablement à partir du premier verre par chacun des 3 ingrédients de départ, soit un quart pour chacun.

<u>Exercice 3 :</u> Les aiguilles à tricoter le temps pendant l'après midi

1°) 15h.16min.22s.; 14h 10min. 55s.; 16h.21min. 49s.; soit **trois situations** de superposition dans la plage horaire. La formule magique est **h = 12k /11 où k prend les valeurs de 0 à 21**.

Ce qui donne **22 cas sur la journée.**

2°) 14h.43min.38s. ; 15h.49min.5s. ; 16h.54min.55s. ; soit **trois situations** d'opposition dans la plage horaire. La formule magique est **h = 6(1+2k) / 11 où k prend les valeurs de 0 à 21.**

Ce qui donne **22 cas sur la journée.**

3°) 14h.27min.16s. ; 15h. pile ; 15h.32min.44s. ; 16h.5min.27s. ; 16h.38min.11s. ; soit **quatre situations** de perpendicularité dans la plage horaire. La formule magique est **h = 3(1+2k) / 11 où k prend les valeurs de 0 à 43.**

Ce qui donne **44 cas sur la journée.**

4°) la précision à une seconde de temps donne une précision de l'angle de la trotteuse de 6 degrés. Pour 15h.42min. l'angle de la trotteuse avec l'aiguille des heures est 111 degrés, celui de la trotteuse avec l'aiguilles des minutes est 108 degrés ; avec la précision demandée il y a bien bissection.

Dans la formule, la valeur k = 1665 donne **le premier horaire** de la plage 14 - 17h. , soit 14h 0min. 5s., et la valeur k = 2021 donne le **dernier horaire** soit 16h. 59min. 42s.

On obtient **357 cas de bissection dans la plage et 2854 dans la journée**.

<u>Exercice 4.</u> La légende de « la boule ou la vie »

1) On envisage toutes les possibilités de répartition, et on calcule la probabilité d'avoir la vie sauve à chaque fois. On note : b=blanche, n=noire.

Urne A	bbb	bb	bbn	bbnn	bbnnn	bbbnn	bbbn
Urne B	nnn	bnnn	bnn	bn	b	n	nn
Proba	1/2	½ x ¾ = 0,375	½ x1/3 + ½ x 2/3 = 0,5	½ x 2/4 + ½ x ½ = 0,5	½ x 3/5 + 0 = 0,3	½ + 2/5 x ½ = 0,7	½ + ½ x ¼ = 0,625

La meilleure répartition pour l'astrologue est : une noire dans une urne et les autres boules dans l'autre. Il a alors **7 chances sur 10** de vivre.

2) Pour n blanches et n noires, la meilleure répartition est une noire dans une urne et les autres boules dans l'autre. La probabilité de vie est : ½ + (1/2)(n-1)/(2n-1).

Quand n croît à l'infini cette probabilité se rapproche de 1/2 + ¼ = **¾.**

3) Pour 3 urnes :

Urne A	bbb	bbbn	bb	bb	bb	bbn	bbn	bbnn
Urne B	nn	n	bn	bnn	b	bn	b	b
Urne C	n	n	nn	n	nnn	n	nn	n
Proba	2/3	2/3 +1/12 = 3/4	1/3 + 1/6 =1/2	1/3 + 2/9 = 5/9	1/3	1/3 +1/6+1/9 = 11/18	1/3 + 1/9 = 4/9	1/3 + 1/6 = 1/2

Le plus grand nombre est 2/3 + 1/12 = ¾.

La meilleure répartition pour l'astrologue est : une noire dans une urne, une autre noire dans une autre, et les autres boules dans l'autre. Il a alors **3 chances sur 4 de vivre.**

4) Pour n blanches et n noires.

La meilleure répartition pour l'astrologue est : une noire dans une urne, une autre noire dans une autre, et les autres boules dans la dernière. La probabilité de survie est alors :

2/3 + (1/3)(n-2)/(2n-2) = (5n-6)/(6n-6).

Quand n croît à l'infini cette probabilité se rapproche de **5/6**.

<u>Exercice 5</u> : encore un cercle confiné (inscrit)

<u>Aides éventuelles :</u>

1°) Soit l'équation $4t^3 + 51t^2 - 441t + 646 = 0$.

Montrer que t = 2 en est une racine. Calculer les autres solutions.

2°) Vérifier les relations $xy = \frac{1}{2}[(x + y)^2 - (x^2 + y^2)]$

et $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$

<u>Solution</u>

1°) En remplaçant dans le membre de gauche t par 2, on obtient : 32 + 204 – 882 + 646 = 0.

t = 2 est bien solution, on peut mettre (t-2) en facteur dans le membre de gauche :

$$(t - 2)(4t^2 + 59t - 323)$$

$4t^2 + 59t - 323 = 0$ donne r' = 17/4 et r'' = - 19.

2°) évident

3°) Les deux tangentes issues d'un point vers un cercle ont la même longueur :

d'où $z = (x - r) + (y - r) = x + y - 2r = 17 - 2r$

Le théorème de Pythagore donne $x^2 + y^2 = z^2$, d'où $z^2 = (x + y)^2 - 2xy = 289 - 2xy$

$$xy = \frac{289 - z^2}{2} = \frac{289 - (17 - 2r)^2}{2} = 34r - 2r^2$$

$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 17^3 - 51xy = 4913 - 51xy = 4913 - 51\,(34r - 2r^2)$

$= 4913 - 1734r + 102r^2$

$[x^3 + y^3 + (2r)^3\,] / (z-2r) = 213$ donne $[4913 - 1734r + 102r^2 + 8r^3] = 213\,(17- 4r)$.

On obtient : $8r^3 + 102\,r^2 - 882r + 1292 = 0$ puis $4r^3 + 51r^2 - 441r + 646 = 0$ on reconnaît l'équation du 1°).

Les solutions sont $r_1 = 2$, $r_2 = 17/4$ et une solution négative non valable.

- Si $r = 2$, on obtient $z = 13$.

$x + y = 17$ et $x^2 + y^2 = 169$ et $xy = 60$.

On tire $y = 60/x$ puis $x^2 + 3600/x^2 = 169$: cette équation bicarrée invite à poser $X = x^2$,

on a $X^2 - 169\,X + 3600 = 0$, puis $X = 25$ ou 144, ce qui aboutit à $x = 5$ ou 12, et $y = 12$ ou 5.

- Si $r = 17/4$, on obtient $z = 17/2$.

$x^2 + y^2 = 289/4$, $xy = 289/2$, $y = 289/2x$, $x^2 + 83521/4x^2 = 289/4$, $4X^2 - 289X + 83521 = 0$

le discriminant est négatif, il n'y a pas de solution avec $r = 17/4$.

Conclusion :

r = 2, z = 13, les côtés de l'angle droit valent 5 et 12.

Compléments :

Des extraits de la délicieuse lettre d'accompagnement des solutions de François Lavallou…

Bonjour Dominique,

1) 2022 est un multiple de 3, donc le trajet du point lumineux devrait être un triangle équilatéral.
De toutes façons, avec 2022 rebonds, on s'attend à son retour à l'origine, face 1

2) a) le grand tiers d'eau est un demi verre.

On aura ainsi 1/6 de verre de chacun des trois premiers ingrédients dans chaque verre.
Lorsqu'on reverse le second verre dans le premier, on aura 1/2/2 = 1/4 d'eau pour 1/6+1/6/2=1,5/6=1/4 des premiers ingrédients.

B) avec 1/4 d'eau dans le second verre, le résultat et l'eau coulent de source.

3) Les situations décrites ci-dessous deviennent nettement plus claires lorsqu'on prend comme point de départ un instant qui correspond à ce que l'on cherche et que le référentiel tourne avec l'aiguille la plus lente : dans tous les cas, les cas favorables suivent une fonction affine dont la fréquence est un diviseur de 24h.

A) L'aiguille des minutes prend 11 tours d'avance par rapport à celle des heures toutes les 12h. Donc les aiguilles se superposent exactement 11 fois toutes les 12h, donc 22 fois par 24h
Donc 3 fois entre 14h et 17h, dont à 15h 16 minutes et quasiment 22 secondes (36/11 heures)

B) les aiguilles s'opposent 6h après s'être superposées, donc 11 fois toutes les 12h, donc 22 fois par 24h.
Donc 3 fois entre 14h et 17h, donc à (96/11+6) 14h 43m 38 s environ.
C) les aiguilles forment un angle droit 3 heures avant ou après une superposition donc 44 fois par 24h.
Donc 5 ou 6 fois toutes les 3 heures. Seulement 5 ici.
D) 1 seconde fait bouger l'aiguille du même nom de 6°.
Sur 24h, l'aiguille des heures fait 2 tours ; celle des minutes en fait 24. Leurs bissectrices en font chacune (24+2) /2 = 13 tours.
L'aiguille des secondes en fait 24*60=1440 dans le même sens.
Donc elle fait 1427 tours de plus que les bissectrices sur 24 heures.

Le plus petit k tel que 12*k/1427 est supérieur à 14 est : k>=14*1427/12=1664,8 donc k=1665 ; il est donc 14h0m5s
Le plus grand k tel que 12*k/1427 est inférieur à 17 est : k>=17*1427/12=2021,5 donc k=2021 (bravo !) ; il est donc 16h59m42s

Le candidat eut donc le temps de compter jusqu'à 357 durant ces presque 3h.

4) l'astrologue augmente ses chances de survie avec une boule blanche seule dans toutes les urnes sauf 1 ; toutes les boules blanches restantes et toutes les boules noires dans la dernière urne.
A) 7
B) 3/4
C) 3/4

D) 5/6

5) Si on a des valeurs entières, alors x et y valent 5 et 12 (ou 12 et 5) et z vaut 13.
De là, on déduit que r vaut 2*30/30 = 2
(1728+125+64)/(13-4)=1917/9=213
La formule est vérifiée.

François BULOT

Extraits des réponses de Daniel Collignon :

Exercice 1 : côté numéro 1

Comme 2022 = 3*674, la configuration est particulière puisque le rayon va générer un triangle équilatéral s'appuyant sur les côtés 1 (rebond numéro 3k+3), 675=1+674 (rebond numéro 3k+1), 1349=1+2*674 (rebond 3k+2) pour k entier.
Le rayon fera donc son 2022ème rebond sur le côté 1.

Exercice 2 : 1/2 et 1/4

A) il suffit de résoudre l'équation $f(1-f) = f/3+(1-f)^2/3$, ou encore $(2f-1)^2=0$, d'où $f=1/2$
B) c'est assez évident puisque c'est la définition de la recette (1/4 de chaque ingrédient), mais si cela n'était pas, il suffit de résoudre l'équation $f=(1-f)/3$, d'où $f=1/4$

Exercice 5 :
$r=2$, $z=13$, $\{x,y\}=\{5,12\}$

Classiquement nous avons :
- $x^2+y^2=Z^2$ (Pythagore)
- $r = S/p$ où S est l'aire du triangle ABC et p son demi-périmètre

D'où $r = xy/(x+y+z) = (x+y-z)/2$ car $(x+y)^2-z^2=2xy$ (ce qui au passage fournit la relation $2xy = 17^2-z^2$)
Ainsi nous avons la relation supplémentaire $2r = 17-z$ permettant d'exprimer le quotient de l'énoncé sous la forme d'un polynôme du 3ème degré en z :
$(x+y)(x^2-xy+y^2)+(17-z)^3 = 213(2z-17)$
$17(2*z^2-2*xy)+2(17-z)^3 = 2*213(2z-17)$
$17(3z^2-17^2)+2(17-z)^3 = 426(2z-17)$
Après développement et regroupement, nous obtenons $2z^3-153z^2+2586z-12155=0$ ou encore $(2z-17)(z-13)(z-55)=0$
Nous ne retenons que $z=13$ car z est entier et $r>0$ entraîne $z < x+y = 17$ (obtenu aussi par l'inégalité triangulaire)
Nous en déduisons alors $2r=4$, d'où $r=2$.
Ensuite nous avons $x+y=17$ et $xy=(17^2-13^2)/2=60$, racines de $X^2-17X+60 = (X-12)(X-5)$.

Remarque : $z-2r$ n'est pas nul car sinon $z=2r$ entraînerait $4r=x+y$, alors que $x>2r$ et $y>2r$ (par définition tout diamètre du cercle inscrit parallèle aux côtés du triangle est strictement intérieur au triangle ; strictement car le cas d'égalité conduirait à 2 côtés parallèles, impossible pour un triangle), contradiction.

Ex 5, le premier à me faire une remarque intéressante a été Frank Zimmer :

Pour l'ex.5, je pense que l'information "x+y=17" est superflue, puisque l'autre permet, à elle seule, de trouver le résultat.

Extrait des réponses de Chia-Tche

Pour le sankaku de la série 4, l'énoncé donne plus d'informations que nécessaire :

Sachant que :

- ABC est un triangle rectangle en B
- x,y,z sont entiers
- x+y=17

On a que (x,y,z) est un triplet pythagoricien dont les deux les plus connus sont (3,4,5) et (5,12,13). Ce n'est pas trop difficile de trouver comment générer les autres si nécessaire, mais dans notre situation on voit tout de suite que (5,12,13) satisfait x+y=17.
Les triplets suivants ont x+y > 17 donc on peut les ignorer, et comme 17 est premier, il n'est pas nécessaire de regarder les triplets "multiples" comme (6,8,10). Donc on sait que notre triangle est le 5-12-13.

Dans un triangle, on a "aire = demi-périmètre * rayon du cercle inscrit", donc r = (5*12) / (5+12+13) = 2 qui est bien entier comme demandé. Cette propriété est très utile avec des triangles rectangles !
Et on peut vérifier que (x^3 + y^3 + (2r)^3) / (z - 2r) = 213 même si on ne l'a pas utilisé pour trouver x,y,z,r. On en aurait probablement eu besoin s'il n'y avait pas la donnée "x,y,z,r sont entiers".
Bon week-end,
Chia-Tche