par Denise Grenier

Analyser
les erreurs des élèves

Un des objectifs de la didactique des mathématiques est de proposer des outils d'analyse aux enseignants, leur permettant de comprendre les difficultés que rencontrent les élèves, leur donnant des critères pour l'évaluation des apprentissages et des pistes de remédiation.

Une des hypothèses de la didactique est que l'élève aborde un concept mathématique en s'appuyant sur ses propres représentations, qu'il doit adapter et remettre en question. Ces concepts ne se construisent pas seulement à partir de leurs définitions et propriétés, mais aussi par l'exploration de ces dernières dans les situations qui les utilisent. Leur sens est alors lié aux types de problème où on les a rencontrés. La « résolution de problèmes » est un moyen privilégié pour réaliser cette exploration (voir encadré). En effet, pour résoudre un problème, un élève va mettre en œuvre ses propres *schèmes* – propriétés, règles, représentations mentales et langagières – dont certains sont corrects et d'autres erronés. Sur cette base, il met en œuvre des règles de fonctionnement – on parle alors de *règles-en-acte*. De nombreux travaux didactiques ont montré que, très souvent, une « erreur » provient de l'application d'une *règle-en-acte* hors de son *domaine de validité*, c'est-à-dire sur des cas où elle ne « marche » pas. Elle donne alors une réponse fausse, alors que dans d'autres cas, elle a donné des réponses justes (voir exemples ci-dessous). Certaines de ces règles résistent à tout enseignement et peuvent resurgir longtemps après que le concept est censé avoir été acquis. Il est donc nécessaire de leur accorder une vraie place en classe.

Ordonner des nombres décimaux

Des élèves doivent ordonner des couples de nombres ayant des parties entières égales. Pour le premier, ils expliquent que « *12,8 > 12,4 parce que 8 est plus grand que 4* ». Leur réponse semble conforme à la règle correcte d'ordonnancement. Mais, pour le couple de nombres suivant, ils concluent « *donc 12,113 > 12,4 parce que 113 est plus grand que 4* ». Leur *règle-en-acte* d'ordonnancement n'est donc pas correcte, on pourrait l'exprimer ainsi : « *Lorsque les parties entières des nombres à ordonner sont égales, on compare les parties décimales. Celle qui forme le plus grand entier donne le nombre le plus grand.* » Cette *règle-en-acte* donne un résultat juste lorsque les nombres à ordonner ont le même nombre de décimales – ce qui est souvent le cas dans les pratiques de classe et explique en partie pourquoi elle résiste dans le temps.
En fait, ces élèves ont utilisé seulement l'ordre sur $\mathbb{N}$, qu'ils connaissent bien. L'écriture usuelle du nombre décimal sous la seule forme « *un entier, virgule, un entier* », peut favoriser une lecture de ce type de nombre comme « *deux entiers que l'on peut regarder séparément* ». Rappeler la règle correcte d'ordonnancement sur $\mathbb{D}$ sera insuffisant car ces erreurs révèlent une conception erronée

du nombre décimal. Il semble donc nécessaire, lors de la correction, d'explorer avec les élèves pourquoi ça « marche » dans le premier cas et pas dans le second, en revenant sur la *nature* du nombre décimal et le *sens de la virgule* dans cette écriture.
Dans ce type de tâche, le choix des nombres à ordonner est donc important, c'est une *variable didactique* : elle permet à l'enseignant de faire des choix qui vont influer sur la connaissance que se construiront ses élèves (voir en encadré).

Construire un symétrique

De nombreux travaux didactiques ont permis de repérer, dans des problèmes de construction du symétrique (axial) d'une figure, une conception très répandue chez les élèves de collège, que l'on peut décrire ainsi : « *Le symétrique d'une figure est une figure isométrique, située de l'autre côté de l'axe, dont les segments images sont parallèles aux segments initiaux, les points remarquables de la figure image étant situés à égale « distance » de l'axe de symétrie, cette distance étant prise le long de l'horizontale dans la feuille.* »
On peut décliner cette conception en *règles-en-actes*, dont certaines sont correctes (figures isométriques, de l'autre côté de l'axe) et d'autres sont fausses, même si elles donnent des constructions correctes dans leur *domaine de validité* (parallélisme des segments symétriques, distance le long de l'horizontale).
Ces travaux ont montré qu'une grande partie des réponses erronées des élèves de collège et début de lycée provient d'une construction conforme à cette conception. Le domaine de validité de la *règle-en-acte* d'« égale distance à l'axe le long de l'horizontale » est l'ensemble des problèmes où l'axe de symétrie est « vertical » dans la feuille. Deux éléments jouent en faveur de la stabilisation de cette *règle-en-acte* chez les élèves. D'abord, un rapport culturel quotidien aux symétries axiales : celles qui nous entourent ont très majoritairement des axes verticaux. Ensuite, le fait que les manuels et les pratiques de classe privilégient les figures où l'axe est vertical. La direction de l'axe de symétrie dans la feuille (verticale, horizontale, oblique) est donc une *variable didactique* dans les problèmes de construction par symétrie axiale. De même, la *règle-en-acte* « de l'autre côté de l'axe » crée des difficultés lorsque la figure coupe l'axe de symétrie, la « position de la figure par rapport à l'axe » est donc aussi une *variable didactique*.
En connaissant l'importance de cette conception spontanée chez les élèves, on peut anticiper par exemple une grande réussite dans la construction du symétrique du triangle pour la figure A – où toutes les *règles-en-acte* erronées donnent une réponse juste – et beaucoup d'erreurs pour la figure B !

figure A

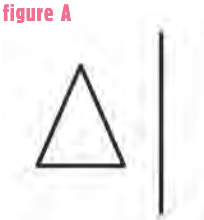

figure B

Ces deux exemples illustrent les apports fondamentaux d'un vrai travail en classe sur les erreurs. Les travaux de didactique sur ces questions (et beaucoup d'autres) sont accessibles dans des articles ou des revues *, ils permettent aux professeurs d'anticiper les difficultés qu'ils pourraient rencontrer dans l'enseignement d'un concept et proposent des moyens de les gérer.

D.G.

* voir la bibliographie sur www.tangente-education.com.

Le périmètre du triangle tronqué

L'exemple suivant illustre la manière dont le choix des valeurs d'une *variable didactique* influe sur l'apprentissage. Le problème ici consiste à déterminer le périmètre d'un triangle quelconque tracé sur une feuille et dont il manque un des sommets (voir figures). Deux contraintes : d'une part, on ne peut pas utiliser une deuxième feuille pour prolonger le triangle et, d'autre part, la technique trouvée doit pouvoir s'adapter quelles que soient la forme et la taille du triangle.

figure C

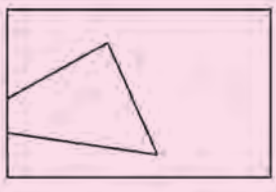

figure D

La contrainte du triangle tronqué va à l'encontre d'une conception très répandue chez les élèves : « *pour calculer le périmètre d'un triangle il faut connaître les mesures de longueurs des trois côtés* ».

La phase de recherche expérimentale aboutit généralement, selon les connaissances des élèves, à différentes solutions consistant toutes à reproduire le triangle en entier sur la feuille par une isométrie : symétrie axiale (la plus courante), symétrie centrale, translation ; puis à mesurer le périmètre sur le triangle isométrique. Mais cette technique ne fonctionne pas quand le triangle est trop grand pour la feuille A4 (figure D).

La consigne « quelles que soient la forme et les dimensions du triangle » oblige à chercher une autre solution. Il en existe une, accessible dès le collège, qui va permettre de calculer le périmètre sans connaître deux des trois longueurs des côtés ! Il suffit de mettre en œuvre une homothétie (le théorème de Thalès suffit).

Le fait que le triangle présenté tienne en entier ou non, après isométrie, sur une feuille A4 est donc une *variable didactique* qui définit deux problèmes très différents en termes d'apprentissages.